

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH - MARKETING
KHOA CƠ BẢN
Bộ Môn Toán – Thống kê

BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP

(Lưu hành nội bộ)
TP. Hồ Chí Minh 2015

LỜI GIỚI THIỆU

Các bạn đang có trong tay cuốn sách “**Bài tập Toán cao cấp**” dành cho sinh viên hệ Đại học chính quy, trường Đại học Tài chính – Marketing. Từ năm học 2015 -2016, để thống nhất về nội dung học tập, đánh giá kết quả và giảng dạy môn **Toán Cao Cấp**, Bộ môn Toán – Thống kê, Khoa Cơ Bản, cho biên soạn cuốn sách này. Cuốn bài tập này do các giảng viên của Bộ môn Toán - Thống kê biên soạn, trên cơ sở các tài liệu đã được sử dụng giảng dạy tại trường Đại học Tài chính – Marketing trong nhiều năm qua và đã được Hội đồng thẩm định giáo trình của Nhà trường thông qua.

Nội dung cuốn bài tập này bám sát Đề cương chi tiết và nội dung lý thuyết môn học Toán cao cấp của trường Đại học Tài chính – Marketing, cũng như các dạng bài trong ngân hàng câu hỏi thi hết học phần môn Toán cao cấp.

Trước phần bài tập của mỗi chương, chúng tôi nêu các yêu cầu đối với sinh viên để các em nắm được các nội dung cũng như các kỹ năng cần rèn luyện. Các bài tập được sắp xếp từ kiểm tra kiến thức cơ bản, đến bài tập tổng hợp, có một số bài tập nâng cao (có đánh dấu *) để sinh viên tham khảo thêm.

Phần cuối sách, chúng tôi có biên soạn một số đề tổng hợp để sinh viên tham khảo và thử sức, tự đánh giá trình độ của mình.

Hy vọng, cuốn sách là tài liệu bổ ích giúp sinh viên trường Đại học Tài chính – Marketing học tốt môn Toán cao cấp và thi kết thúc học phần đạt kết quả cao!

Lần đầu tiên biên soạn cuốn Bài tập này nên chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được sự góp ý của sinh viên và các thầy cô giáo, để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn! Mọi ý kiến góp ý xin gửi về địa chỉ: Bộ môn Toán – Thống kê, Khoa Cơ Bản, trường Đại học Tài chính – Marketing.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn và trân trọng giới thiệu cuốn sách cùng các bạn!

TP. Hồ Chí Minh, ngày 15 tháng 9 năm 2015

Bộ môn Toán – Thống kê

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	1
Chương 1. Ma trận – Định thức.....	5
A. Yêu cầu đối với sinh viên	5
B. Bài tập	5
Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính.....	20
A. Yêu cầu đối với sinh viên	20
B. Bài tập	20
Chương 3. Không gian vectơ.....	30
A. Yêu cầu đối với sinh viên	30
B. Bài tập	30
Chương 4. Phép tính vi phân hàm một biến	42
A. Yêu cầu đối với sinh viên	42
B. Bài tập	42
Chương 5. Tích phân	55
A. Yêu cầu đối với sinh viên	55
B. Bài tập	55
Chương 6. Phép tính vi phân hàm nhiều biến.....	66
A. Yêu cầu đối với sinh viên	66
B. Bài tập	66
Chương 7. Phương trình vi phân	76
A. Yêu cầu đối với sinh viên	76
B. Bài tập	76
Một số đề luyện tập.....	82
Tài liệu tham khảo	96

Chương 1

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm vững các khái niệm cơ bản về ma trận và các dạng ma trận đặc biệt; biết thực hiện phép cộng hai ma trận cùng cấp và phép nhân ma trận với một số thực. Chú ý tới phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.

2. Nắm vững định nghĩa, cách tính định thức ma trận vuông và một số tính chất căn bản của định thức.

3. Nắm vững khái niệm ma trận nghịch đảo và hai phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.

4. Nắm được khái niệm hạng ma trận, các phương pháp tìm hạng ma trận.

5. Biết vận dụng kiến thức về ma trận, định thức để giải một số mô hình kinh tế.

B. Bài tập

Bài 1:

Thực hiện các phép tính trên các ma trận sau:

1. Tính $5A - 3B + 2C$, biết :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Tính AB , BA biết:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Tính AB , BA biết:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp số:

$$1) 5A - 3B + 2C = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ -11 & 3 \\ 27 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$2) AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \\ 9 & 22 & -15 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3) AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 29 & -55 & 27 \\ 17 & -36 & 19 \\ 14 & -25 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bài 2:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Tính } f(A) = A^2 - 5A + 3I_3.$$

$$\text{Đáp số: } f(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -6 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 3:

Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Có thể thành lập được tích của các ma trận nào trong các ma trận trên.

2. Tính AB , ABC .

3. Tính $(AB)^3$, C^n với $n \in \mathbb{N}$.

4. Tìm ma trận chuyển vị của A và tính $A^T C$.

Đáp số:

1) AB, BC, CB, CA ;

$$2) AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, ABC = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) (AB)^3 = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -10 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4) A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A^T C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4:

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X sao cho

$$3A + 2X = I_3.$$

Đáp số: $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Bài 5:

Tính các định thức sau:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$7. \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & m & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & m & 3 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Đáp số:

- 1) -5; 2) 10; 3) 160; 4) abcd;
 5) xyzuv; 6) 394; 7) $-29m - 145$; 8) $3429m - 551$.

Bài 6:

Chúng tỏ rằng các định thức sau bằng không.

$$1. \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn : 1) Lấy cột 1 cộng cột 2; 2) Từ cột 3, ta tách làm hai ma trận có cùng cột 1 và 2 ; 3) Lấy cột 2 cộng 2 lần cột 1; 4) Lấy cột 1 cộng cột 2 và cột 3.

Bài 7: Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Hướng dẫn : Biến đổi sơ cấp hoặc dùng qui tắc 6 đường chéo.

Bài 8:

Tìm x sao cho:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0.$$

Đáp số : $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$.

Bài 9:

Tính định thức cấp n sau:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_1 + 2b_2 & \cdots & a_1 + 2b_n \\ a_2 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & \cdots & a_2 + 2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + 2b_1 & a_n + 2b_2 & \cdots & a_n + 2b_n \end{vmatrix}$$

Đáp số : 1) $n!$; 2) $(a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$; 3) ; 4) 0.

Bài 10:

Các phần tử của ma trận vuông cấp 3 chỉ nhận giá trị 0 và 1. Tìm giá trị lớn nhất của định thức đó.

Đáp số : 2.

Bài 11:

Tính định thức của ma trận vuông cấp n , biết rằng:

$$1. a_{ij} = \min(i, j) \quad 2. a_{ij} = \max(i, j)$$

Đáp số: 1) 1; 2) $(-1)^{n-1}n$.

Bài 12:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tính $(B^{-1}AB)^n$, $n \in \mathbb{N}$ rồi suy ra A^n .

$$\text{Đáp số : } (B^{-1}AB)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 13:

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2.$$

Chứng minh rằng : $A^2 - 2A + I_2 = 0$. Suy ra A^{-1} .

Hướng dẫn : Tính trực tiếp ta có điều phải chứng minh rồi suy ra A^{-1} .

Bài 14:

Tìm a để ma trận sau khả nghịch và tính A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Đáp số: } a \neq 3; A^{-1} = \frac{1}{a-3} \begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Bài 15:

Tìm m sao cho các ma trận sau khả nghịch

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp số: 1) $m \neq 1 \wedge m \neq 3$; 2) $m \neq 1 \wedge m \neq -3$.

Bài 16:

Tìm x sao cho:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0.$$

Đáp số: $x=0 \vee x=1 \vee x=-1$.

Bài 17:

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau (nếu có):

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp số:

$$1) A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; 2) A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix};$$

$$3) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; 4) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Bài 18:

Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Tìm ma trận X sao cho : $XA = B$.
2. Tìm ma trận Y sao cho $BY = C$.

$$\text{Đáp số : 1) } X = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; 2) Y = \begin{pmatrix} 15-4m & 7-4n \\ 7-2m & 4-2n \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Bài 19:

Cho A là ma trận vuông cấp n, $n \geq 1$ hãy tìm hạng của ma trận phụ hợp trong các trường hợp sau:

1. $\text{rank}(A) = n$.
2. $\text{rank}(A) \leq n - 2$.
3. $\text{rank}(A) = n - 1$.

Đáp số : 1. $\text{rank}(A^*) = n$; 2. $\text{rank}(A^*) = 0$; 3. $\text{rank}(A^*) = 1$.

Bài 20:

Cho ma trận A như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Tìm hạng của ma trận A.

2. Tìm ma trận phụ hợp của A.

Đáp số : 1. $\text{rank}(A) = 2$; 2. $A^* = 0$ (ma trận O cấp n).

Bài 21:

Tính hạng của các ma trận sau:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Đáp số: 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 4.

Bài 22:

Tùy theo m , tìm hạng của các ma trận sau:

$$1. \begin{pmatrix} m & 5m & -m \\ 2m & m & 10m \\ -m & -2m & -3m \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & m \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp số : 1) $m = 0$, $\text{rank} = 0$; $m \neq 0$, $\text{rank} = 2$;

2) $m = 0$, $\text{rank} = 0$; $m \neq 0$, $\text{rank} = 3$;

3) $m = 7$, $\text{rank} = 2$; $m \neq 7$, $\text{rank} = 3$;

4) $m = 1$, $\text{rank} = 3$; $m \neq 1$, $\text{rank} = 4$.

Bài 23*:

Tính A^n , biết rằng:

$$1. A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 4. A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$

Đáp số:

$$1) A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix};$$

$$2) A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix};$$

$$3) A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix};$$

$$4) A^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{6} & -2\sin \frac{n\pi}{6} \\ \sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} - \sin \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Bài 24*:

Tìm a, b sao cho
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Đáp số : $a = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right); b = \sqrt[4]{2} \sin\left(\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right).$

Bài 25*:

Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng $\det(A^n + B^n)$ chia hết cho 2^{n+1} .

Hướng dẫn :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Bài 26:

Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối B như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 170 \\ 280 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm ma trận tổng cầu X.

$$\text{Đáp số : } X = \begin{pmatrix} 385,96 \\ 591,21 \end{pmatrix}$$

Bài 27:

Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

1. Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t .
2. Biết $x(t) = (800, 1500, 700)$, tìm sản lượng mỗi ngành năm t .

Hướng dẫn:

$$\text{a) } C = [I - A(t)]^{-1}; \text{ b) } X(t) = [I - A(t)]^{-1} x(t).$$

Bài 28:

Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1. Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t . Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.
2. Năm $(t+1)$ nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là $(180, 150, 100)$ (tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm $(t+1)$ và năm t như nhau.

Hướng dẫn:

a) $C = [I - A(t)]^{-1}$; b) $X(t+1) = [I - A(t+1)]^{-1} x(t+1)$.

Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm được định nghĩa và các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính. Thành thạo giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss.

2. Nắm được định nghĩa hệ Cramer và cách giải hệ Cramer, phương pháp ma trận nghịch đảo, phương pháp Cramer (Định thức).

3. Nội dung định lý Cronecker – Capelli về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

4. Biết vận dụng các kiến thức về hệ phương trình vào giải một số mô hình kinh tế.

B. Bài tập

Bài 1:

Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Cramer:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

Đáp số:

1) $(3, 1, -1)$; 2) $(2, -1, 1)$; 3) $(-1, -2, 2)$; 4) $(2, -2, 3)$;

5) $\left(2, \frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$; 6) $\left(5, -\frac{11}{4}, \frac{37}{2}, -\frac{63}{4}\right)$; 7) $(2, 0, 0, 0)$.

Bài 2:

Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9 \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - x_4 = 10 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$$

Đáp số:

1) $(1, 2, -3)$; 2) $(2, -1, 3)$; 3) $(2, 1, 1)$;

4) $(3, -2, 1)$; 5) $(1, -2, -4)$; 6) $\left(\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{2}\right)$;

7) $(11m+11, 5m+4, m, 1)$;

8) $(-17, 24, 33, 14)$; 9. Vô nghiệm; 10. Vô nghiệm .

Bài 3:

Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Đáp số:

- 1) $(0, 0, 0)$; 2) $(-5a + 4b, 7a - 7b, a, b)$; 3) $(0, 0, 0)$;
 4) $(0, 0, 0, 0)$; 5) $(-6a, -15a, -20a, 11a)$;
 6) $(0, 0, 0, 0)$; 7) $(0, 0, 0, 0)$;
 8) $(3a - 13b, 19a - 20b, 17a, 17b)$.

Bài 4:

Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$1. \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = m \\ 2x_1 + (m+1)x_2 + (m+1)x_3 = m+1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + mx_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (m+1)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$$

Đáp số:

1) TH1: $m \neq 1 \wedge m \neq -2$: hệ có nghiệm duy nhất;

TH2: $m = 1$: hệ vô số nghiệm; TH3: $m = -2$: hệ vô nghiệm.

2) Hệ vô số nghiệm với mọi m ;

3) TH1: $m \neq 0 \wedge m \neq -3$: hệ có nghiệm duy nhất;

TH2: $m = 0$: hệ vô số nghiệm; TH3: $m = -3$: hệ vô nghiệm.

4) Hệ vô số nghiệm với mọi m .

Bài 5:

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Đáp số:

$$1) (-64, 8, -18); 2) \left(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); 3) (0, 0, -1, 0).$$

Bài 6:

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Đáp số: $m \neq 2 \wedge m \neq -3$.

Bài 7:

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

Định k để hệ phương trình vô nghiệm.

Đáp số: $k = -2$.

Bài 8:

Cho phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = k \end{cases}$$

Định k để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Đáp số: $k = 0$.

Bài 9:

Cho phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$$

Định m để hệ phương trình vô nghiệm.

Đáp số: $m = 0$.

Bài 10:

Xét thị trường có 4 loại hàng hóa. Biết hàm cung và cầu của 4 loại hàng hóa trên là:

$$Q_{S_1} = 20P_1 - 3P_2 - P_3 - P_4 - 30; \quad Q_{D_1} = -11P_1 + P_2 + 2P_3 + 5P_4 + 115$$

$$Q_{S_2} = -2P_1 + 18P_2 - 2P_3 - P_4 - 50; \quad Q_{D_2} = P_1 - 9P_2 + P_3 + 2P_4 + 250$$

$$Q_{S_3} = -P_1 - 2P_2 + 12P_3 - 40; \quad Q_{D_3} = P_1 + P_2 - 7P_3 + 3P_4 + 150$$

$$Q_{S_4} = -2P_2 - P_3 + 18P_4 - 15; \quad Q_{D_4} = P_1 + 2P_3 - 10P_4 + 180$$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

Đáp số: $P_1 = 10$, $P_2 = 15$, $P_3 = 15$, $P_4 = 10$.

Chương 3

KHÔNG GIAN VECTOR

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm vững khái niệm cơ bản về vector, không gian vector, không gian con.

2. Nắm vững các khái niệm về hệ vector độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, cơ sở hạng của hệ vector.

B. Bài tập

Bài 1:

Chứng minh các tập sau là không gian vector.

1. $\square^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \square, i = \overline{1, n} \right\}$ với hai phép toán sau:

- Phép cộng:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Phép nhân: $k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$

2. $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \square \right\}$, với hai phép toán cộng

hai ma trận và nhân một số thực với một ma trận.

Hướng dẫn: Dùng định nghĩa.

Bài 2:

Hỏi các tập dưới đây là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không?

1. Các vector có dạng $(a, 0, 0)$.

2. Các vector có dạng $(a, 1, 1)$.

Đáp số: 1) là không gian con; 2) không là không gian con.

Bài 3:

Cho không gian vector V trên trường số thực $\mathbb{R}$, α là một vector cố định thuộc V . Chứng minh rằng tập hợp $W = \{r\alpha \mid r \in \mathbb{R}\}$ là một không gian con của V .

Hướng dẫn: Dùng định nghĩa về không gian con.

Bài 4:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector $u_1 = (1, -2, 3)$, $u_2 = (0, 1, -3)$. Xét xem vector $u = (2, -3, 3)$ có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 hay không?

Đáp số: $u = (2, -3, 3)$ là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2

Bài 5:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét xem vector u có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 hay không?

1. $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u = (1, 2, 1)$

2. $u_1 = (-2, 1, 0)$, $u_2 = (3, -1, 1)$, $u_3 = (2, 0, -2)$, $u = (1, 3, 1)$.

Đáp số:

1) u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 ;

2) u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 .

Bài 6:

Hãy biểu diễn x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w .
Trong đó:

$$1. x = (7, -2, 15), u = (2, 3, 5), v = (3, 7, 8), w = (1, -6, 1)$$

$$2. x = (1, 4, -7, 7), u = (4, 1, 3, -2), v = (1, 2, -3, 2), w = (16, 9, 1, -3)$$

Đáp số: 1) $x = 6u - 2v + w$; 2) $x = 3u + 5v - w$.

Bài 7:

Trong không gian các ma trận thực vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$,
cho bốn vector:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hỏi vector u có phải là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3
hay không ?

Đáp số: u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 .

Bài 8:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector:

$$u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (0, 1, -3).$$

Tìm m để vector $u = (1, m, -3)$ là tổ hợp tuyến tính của
 u_1, u_2 .

Đáp số: $m = 0$.

Bài 9:

Hãy xác định m sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w :

$$1. u = (2, 3, 5), v = (3, 7, 8), w = (1, -6, 1), x = (7, -2, m)$$

$$2. u = (3, 2, 5), v = (2, 4, 7), w = (5, 6, m), x = (1, 3, 5)$$

Đáp số: 1) $m = 15$; 2) $m \neq 12$.

Bài 10:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, các hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

$$1. u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)$$

$$2. u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (2, 3, 1)$$

Đáp số: 1) độc lập; 2) phụ thuộc.

Bài 11:

Trong không gian $\mathbb{R}^4$, các hệ vectơ sau là độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

$$1. u_1 = (-1, 2, 0, 1), u_2 = (1, 2, 3, -1), u_3 = (0, 4, 3, 0)$$

$$2. u_1 = (1, 2, 3, 2), u_2 = (-1, 2, 1, -2), u_3 = (1, -3, -2, 2)$$

$$3. u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (2, 1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 2, 1)$$

Đáp số: 1) phụ thuộc; 2) phụ thuộc; 3) độc lập.

Bài 12:

Trong không gian các ma trận thực vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho hệ gồm bốn vectơ:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng hệ trên độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn: Xét hệ thuần nhất tương ứng và chứng minh nó có nghiệm duy nhất.

Bài 13:

Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ và $x, y, z \in V$. Chứng minh rằng $\{x, y, z\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{x + y, y + z, z + x\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn: Dùng định nghĩa độc lập tuyến tính.

Bài 14:

Biểu thị ma trận $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính

của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Đáp số: $E = 3A - 2B - C$.

Bài 15:

Mỗi hệ vector sau đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không

1. $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)\}$
2. $\{v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2), v_3 = (8, -1, 8)\}$.

Đáp số: 1) sinh ra $\mathbb{R}^3$; 2) không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

Bài 16:

Hệ vector nào trong các hệ vector sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

1. $S = \{\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, 2, 3)\}$
2. $S = \{\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, 2, 3), \alpha_3 = (0, 0, 5)\}$
3. $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (1, 2, 5), \alpha_3 = (0, 1, 3)\}$

$$4. S = \{\alpha_1 = (-1, 0, 1), \alpha_2 = (-1, 1, 0), \alpha_3 = (1, -1, 1), \alpha_4 = (2, 0, 5)\}$$

Đáp số: 1) không là cơ sở; 2) là cơ sở; 3) không là cơ sở; 4) không là cơ sở.

Bài 17:

Trong không gian $\mathbb{R}^4$, tìm hạng và một cơ sở của các hệ vector sau

$$1. \alpha_1 = (-1, 2, 0, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3, -1), \alpha_3 = (0, 4, 3, 0).$$

$$2. \beta_1 = (-1, 4, 8, 12), \beta_2 = (2, 1, 3, 1), \beta_3 = (-2, 8, 16, 24), \beta_4 = (1, 1, 2, 3)$$

Đáp số:

$$1) \text{rank} = 2; \text{cơ sở } \alpha'_1 = (-1, 2, 0, 1), \alpha'_2 = (0, 4, 3, 0);$$

$$2) \text{rank} = 3; \text{cơ sở}$$

$$\beta'_1 = (-1, 4, 8, 12), \beta'_2 = (0, 1, 2, 3), \beta'_3 = (0, 0, 1, -2).$$

Bài 18:

Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vector sau:

$$1. \alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (-1, 5, 0)$$

$$2. \alpha_1 = (2, 4, 1), \alpha_2 = (3, 6, -2), \alpha_3 = (-1, 2, -1/2)$$

Đáp số:

$$1) \text{Số chiều } 3; \text{cơ sở}$$

$$\alpha'_1 = (1, -1, 2), \alpha'_2 = (0, 1, -2), \alpha'_3 = (0, 0, 1);$$

$$2) \text{Số chiều } 2; \text{cơ sở } \alpha'_1 = (1, 2, -3), \alpha'_2 = (0, 0, 1).$$

Bài 19:

Xác định số chiều và tìm một cơ sở của không gian nghiệm của các hệ sau:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Đáp số: 1) cơ sở $W = \{u_1 = (-1, -1, 4, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1)\}$ và số chiều $\dim W = 2$.

2) cơ sở $W = \{(-1, 1, 1)\}$ và số chiều $\dim W = 1$.

3) $W = \{(0, 0, 0)\}$ và số chiều $\dim W = 0$.

4) cơ sở $W = \{(3, -4, 1)\}$ và số chiều $\dim W = 1$.

Bài 20:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét hệ vector:

$$S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2), \alpha_3 = (1, 2, 3)\}$$

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$,
2. Tìm tọa độ của $x = (6, 9, 14)$ trong cơ sở S .

Đáp số: 1) $|A_S| = -1$; 2) $[x]_S^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài 21:

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét tập hợp :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

1. Chứng tỏ rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm một cơ sở và số chiều cho W .
3. Kiểm tra xem các vector sau có nằm trong W không?
 $u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$, $w = (1, 0, -1, 0)$.

Đáp số:

1) Dùng định nghĩa;

2) Cơ sở của $W = \{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$,

dim $W = 3$;

3) $u \in W$; $v, w \notin W$.

Bài 22:

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ:

$$S = \{\alpha_1 = (0, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0, 1), \alpha_4 = (1, 1, 1, 0)\}$$

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm tọa độ của vector $x = (1, 1, 1, 1)$ trong S .

Đáp số: 1) $|A_S| = -3$; 2) $[x]_S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Bài 23:

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho tập:

$$S = \{u_1 = (1, 2, -1, -2), u_2 = (2, 3, 0, -1), u_3 = (1, 2, 1, 4), u_4 = (1, 3, 1, 0)\}.$$

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm tọa độ của vector $x = (7, 14, -1, 2)$ trong S .

Đáp số: 1) $|A_S| = 14$; 2) $[x]_S^T = \begin{pmatrix} \frac{26}{7} & \frac{2}{7} & \frac{17}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Bài 24:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận đổi cơ sở từ cơ sở S_1 đến S_2 và ma trận đổi cơ sở từ cơ sở S_2 đến S_1 , trong các trường hợp sau:

$$1. S_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$S_2 = \{f_1 = (2, 1, 1), f_2 = (1, 2, 1), f_3 = (1, 1, 2)\}.$$

$$2. S_1 = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)\}$$

$$S_2 = \{v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (1, 1, 2)\}.$$

Đáp số:

$$1) P(S_1 \rightarrow S_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$2) P(S_1 \rightarrow S_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bài 25:

Trong không gian $\square^3$, cho các hệ vector:

$$S_1 = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2), u_3 = (1, 2, 3)\}$$

$$S_2 = \{v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (3, 2, 5), v_3 = (1, -1, m)\}$$

1. Chứng minh rằng S_1 là cơ sở của $\square^3$.

2. Tìm m để S_2 là một cơ sở của $\square^3$.

3. Với $m = 0$. Tìm ma trận chuyển $P(S_1 \rightarrow S_2)$ và $P(S_2 \rightarrow S_1)$.

Đáp số: 1) $|A_S| = -1$; 2) $m \neq -20$.

$$3) P(S_1 \rightarrow S_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, P(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 2/5 & 3/5 \\ -1/4 & -1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Bài 26:

Cho hai hệ vector trong không gian $\square^4$:

$$S_1 = \{ \alpha_1 = (0, 1, 0, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0, 1), \alpha_3 = (1, 2, 0, 1), \alpha_4 = (-1, 0, 2, 1) \}$$

$$S_2 = \{\beta_1 = (1, 0, 2, -1), \beta_2 = (0, 3, 0, 2), \beta_3 = (0, 1, 3, 1), \beta_4 = (0, -1, 0, 1)\}$$

1. Chứng minh chúng là hai cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở S_1 sang cơ sở S_2 .
3. Tìm tọa độ của $\alpha = (2, 0, 4, 0)$ đối với cơ sở S_2 .
4. Tìm tọa độ của α đối với cơ sở S_1 .

Đáp số:

$$1) |A_{S_1}| = -4, |A_{S_2}| = 15.$$

$$2) P(S_1 \rightarrow S_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1/2 \\ 2 & -2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3) [\alpha]_{S_2}^T = (2 \quad 2/5 \quad 0 \quad 6/5).$$

$$4) [\alpha]_{S_1}^T = (-3 \quad 5 \quad -1 \quad 2).$$

Bài 27:

Xét trong không gian $\mathbb{R}^3$ hai cơ sở $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó:

$$u_1 = (-3, 0, -3), u_2 = (-3, 2, 1), u_3 = (1, 6, -1),$$

$$v_1 = (-6, -6, 0), v_2 = (-2, -6, 4), v_3 = (-2, -3, 7),$$

1. Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ S_2 sang S_1 .

2. Tính ma trận tọa độ $[w]_{S_1}$ của $w = (-5, 8, 5)$ và tính $[w]_{S_2}$.

Đáp số:

$$1) P(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{pmatrix} 3/4 & 2/3 & 1/12 \\ -3/4 & -3/2 & -17/12 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix};$$

$$2) [w]_{S_1}^T = (-19/21 \quad 19/7 \quad 3/7), [w]_{S_2}^T = (7/6 \quad -4 \quad 3).$$

Chương 4

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm được các khái niệm cơ bản về hàm số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân hàm số một biến.

2. Giới thiệu một số giới hạn dạng vô định và phương pháp giải.

3. Biết vận dụng đạo hàm vào trong trong học: tính giới hạn, tính gần đúng, khai triển Taylor, khảo sát hàm số.

4. Biết vận dụng đạo hàm vào trong phân tích kinh tế: hàm cận biên, hệ số co giãn, bài toán tối ưu một biến,...

B. Bài tập

Bài 1:

Chứng minh rằng khi $n \rightarrow \infty$ thì dãy $3, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$ có giới hạn là 2.

Hướng dẫn:

$$\text{Số hạng thứ } n \text{ của dãy } x_n = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n - 2 = \frac{1}{n}.$$

Bài 2:

Dùng định nghĩa để chứng minh rằng các dãy sau có giới hạn là 0 khi $n \rightarrow \infty$.

$$1. x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$2. x_n = \frac{2n}{n^3 + 1}$$

$$3. x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$$

Hướng dẫn:

$$1) |x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon; 2) |x_n| < \frac{2}{n^2} < \varepsilon; 3) |x_n| = 0,999^n < \varepsilon.$$

Bài 3:

Chứng minh rằng các dãy sau hội tụ.

$$1. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$2. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ căn})$$

Hướng dẫn : Chứng minh dãy tăng bị chặn trên.

Bài 4:

Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh dãy sau số hội tụ.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Hướng dẫn: chứng minh $|x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq n_0$.

Bài 5:

Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh dãy số sau phân kỳ:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Hướng dẫn: chứng minh $|x_m - x_n| \geq \varepsilon, \forall m, n \geq n_0$.

Bài 6:

Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} + 2n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+2}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{2^n + 3^{n+1}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n, \quad |q| < 1.$$

Đáp số: 1) $\frac{1}{3}$; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 0.

Bài 7:

Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n}{x^n}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x + a_1)(x + a_2)} - x$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 8x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + 2x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + \sin 2x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{5x+2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3x}{4-3x} \right)^{2x-1}$$

Đáp số:

$$1) \frac{4}{3}; 2) \frac{n}{m}; 3) \frac{1}{2}; 4) \frac{1}{n!};$$

$$5) -\frac{1}{2}; 6) +\infty; 7) \frac{a_1+a_2}{2}; 8) \frac{5}{8};$$

$$9) 0; 10) 1; 11) \frac{1}{4}; 12) 1;$$

$$13) -\frac{1}{2}; 14) \frac{1}{12}; 15) 1; 16) 0; 17) \frac{\sqrt{7}}{4};$$

$$18) 1; 19) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right); 20) \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$21) 1; 22) e^2; 23) 1; 24) e^{-10}; 25) e^2.$$

Bài 8*:

Tính giới hạn:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3 \tan x) - x^2}{\arctan 4x + \cos 2x - e^x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(1 + \tan^2 2x) + 2 \arcsin^3 x}{1 - \cos 4x + \sin^2 x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x - e^x)(x^2 + 1 - \cos x)}{x(\cos 3x - \cos x) \ln(1 + e^2 - \cos x)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 6x + 8) \arctan(x^3 - 8) + 2 \ln(x^2 - 4x + 5) + (x - 2)^3}{(e^x - e^2)(2 - \sqrt{x + 2}) + 2x^2 - 8x + 9 - e^{(x-2)^3}}$$

Đáp số: 1) $\frac{7}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{16}$; 4) $\frac{88}{e^2 - 8}$.

Bài 9:

Xét tính liên tục các hàm số sau:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Đáp số: 1) Liên tục bên phải tại 0; 2) Liên tục tại 0.

Bài 10:

Tìm a để hàm số sau liên tục tại 0.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $a = 1$.

Bài 11:

Tìm m để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} & \text{khi } 0 < |x| < 1 \\ m & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Đáp số: $m = 2$.

Bài 12:

Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số sau : $f(x) = x|x|$

Đáp số: $f'(x) = 2|x|$

Bài 13:

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Tính $f'(x)$.

$$\text{Đáp số: } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Bài 14:

Chúng minh hàm số: $y = (x^2 + 1)(e^x + 2)$, thỏa mãn
phương trình: $y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x(x^2 + 1)$

Hướng dẫn: Tính đạo hàm rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh..

Bài 15:

Cho hàm số: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$.

Chúng minh $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.

Hướng dẫn: Tính đạo hàm rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Bài 16:

Cho hàm số: $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$.

Chứng minh $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n(n-1)}{2^{n-2}}$.

Hướng dẫn:

Sử dụng công thức tính đạo hàm $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

Bài 17:

Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Tính $f^{(2013)}(0)$.

Hướng dẫn: Tính đạo hàm cấp 1,2,3,...,rồi dự đoán đạo hàm cấp n.

Bài 18:

Cho hàm số $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Hướng dẫn: Sử dụng định lý Rolle

Bài 19:

Ứng dụng đạo hàm chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

Hướng dẫn:

Xét $f(x) = \ln(1+x) - x$; $g(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$, tính đạo hàm.

Bài 20:

Tính đạo hàm $y'(x)$ của các hàm được xác định như sau

1. $x = \ln(1+t^2), \quad y = t - \arctan t$

2. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

Hướng dẫn :

1) Dùng công thức đạo hàm theo tham số;

2) Dùng công thức đạo hàm hàm ẩn.

Bài 21:

Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 0 \\ \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

Hướng dẫn: Dùng định nghĩa đạo hàm..

Bài 22:

Tính vi phân của các hàm số sau:

1. $y = \frac{a}{x} + \arctan \frac{x}{a}$

2. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

$$3. y^5 + y = x^2 + 1$$

$$4. x + y = e^y$$

Hướng dẫn: Tính đạo hàm rồi thế vào biểu thức vi phân

Bài 23:

Tính gần đúng:

$$31. \sqrt[4]{17} \quad 2. \arctan(0,97) \quad 3. \tan 46 \quad 4. \sqrt[5]{32,002}$$

Đáp số: 1) 2,03125; 2) 0,7704; 3) 1,0349; 4) 2,000025.

Bài 24:

Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau:

$$1. f(x) = \sin x$$

$$2. f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$3. f(x) = \sin 2x + \cos 3x$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Đáp số :

$$1) f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); 2) f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$3) f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$4) f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Bài 25:

Khai triển Maclourent các hàm số sau tới lũy thừa bậc 5.

$$1. f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$2. f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$4. f(x) = x + \sqrt{x+1}$$

Đáp số:

$$1) -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5. \quad 2) -2x - 2x^3 - 2x^5.$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{31}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5.$$

$$4) 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5.$$

Bài 26:

Khai triển Taylor của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$ tới lũy thừa bậc 4. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$\text{Đáp số: } 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Bài 27:

Cho hàm số:

$$f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$$

Tìm 3 số hạng đầu của khai triển Taylor tại $x_0 = 1$, áp dụng để tính xấp xỉ $f(1,03)$.

Đáp số:

$$f(1) = 1, f'(1) = -6, f''(1) = 2; f(1,03) \approx 1 - 6 \cdot 0,03 + (0,03)^2 \approx 0,821.$$

Bài 28:

Cho hàm sản xuất ngắn hạn: $Q = 30\sqrt{L}$; $L \geq 0$.

a) Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động MPL.

b) Tại $L_0 = 144$, nếu L tăng thêm một đơn vị, hỏi sản lượng sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?

Hướng dẫn: a) Tính $MPL = Q'_L$; b) $MPL(144) = 1,25$.

Bài 29:

Cho hàm cầu của một loại hàng hoá là $Q_D = 6P - P^2$. Tính hệ số co giãn tại $P_0 = 5$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Đáp số: $E_D = -4$.

Bài 30:

Cho biết hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 100\sqrt[5]{L^3}$, $L > 0$ và giá của sản phẩm là $P = 5$ USD, giá thuê lao động là $P_L = 3$ USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $L = 100000$.

Bài 31:

Cho biết hàm chi phí là $TC(Q) = 4Q^3 + 5Q^2 + 500$; $Q > 0$ và hàm cầu $Q = 11160 - P$. Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

Đáp số: $Q = 30$.

Bài 32:

Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2640 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^2 + 1000Q + 100$. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Đáp số: $t = 820$.

Chương 5

TÍCH PHÂN

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm được khái niệm nguyên hàm, tích phân bất định và bảng các công thức nguyên hàm cơ bản, phương pháp tính tích phân bất định.

2. Nắm được định nghĩa tích phân xác định, công thức Newton Leibnitz và các phương pháp tính tích phân xác định.

3. Nắm vững khái niệm tích phân suy rộng, phương pháp tính tích phân suy rộng.

4. Biết vận dụng tích phân vào phân tích kinh tế : Tìm các hàm tổng khi biết hàm cận biên, tìm hàm quỹ vốn khi biết hàm đầu tư, tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

B. Bài tập

Bài 1:

Chứng minh $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là một nguyên hàm của hàm số.

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Hướng dẫn: xét $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$.

Bài 2:

Tìm a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$.

Đáp số: $a = \frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}, c = -\frac{3}{5}.$

Bài 3:

Cho hàm số f xác định và liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và thỏa:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm số $f(x)$.

Đáp số: $f(x) = 2e^x.$

Bài 4:

Cho hàm số f có đạo hàm và thỏa:

$$\begin{cases} 2f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f(x) = 3e^{2x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn: Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, tính đạo hàm rồi suy ra $g(x)$

là hàm hằng.

Bài 5:

Tích các tích phân bất định sau:

1) $\int \frac{(2x+1)^2}{x} dx$

9) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4 + \cos^2 x}} dx$

2) $\int \frac{x^2}{(1+x)^8} dx$

10) $\int x^5 e^{-x} dx$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$11) \int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$$

$$4) \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$12) \int \frac{dx}{x^2-4x+13}$$

$$5) \int x^2 e^{-x} dx$$

$$13) \int \frac{xdx}{2x^2-x+5}$$

$$6) \int x^2 \sin x dx$$

$$14) \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$$

$$7) \int \frac{dx}{4x^2+9}$$

$$15) \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$$

$$8) \int \sqrt{4-x^2} dx$$

$$16) \int \frac{1}{3+2\cos x+\sin x} dx$$

Đáp số :

$$1) 2x^2 + 4x + \ln|x| + C;$$

$$2) -\frac{1}{7(x+1)^7} + \frac{1}{3(x+1)^6} - \frac{1}{5(x+1)^5} + C;$$

$$3) \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + C;$$

$$4) e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C;$$

$$5) -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C;$$

$$6) -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C; 7) \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C;$$

$$8) \frac{1}{2} \sin(2 \arccos x) - \arccos x + C ;$$

$$9) \ln(\cos x + \sqrt{4 + \cos^2 x}) + C ;$$

$$10) -x^5 e^{-x} - 5x^4 e^{-x} - 20x^3 e^{-x} - 60x^2 e^{-x} - 120x e^{-x} - 120e^{-x} + C ;$$

$$11) -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x-4| + C ;$$

$$12) \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C ;$$

$$13) \frac{1}{4} \ln(2x^2 - x + 5) + \frac{2\sqrt{41}}{41} \arctan\left(\frac{4x-1}{\sqrt{41}}\right) + C ;$$

$$14) \frac{e^x}{x+1} + C ;$$

$$15) \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln|2 + \cos x| + C ;$$

$$16) \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C .$$

Bài 6:

Tính các tích phân xác định sau bằng định nghĩa:

$$1) \int_0^1 e^x dx \quad 2) \int_0^{\pi/2} \cos x dx \quad 3) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

Đáp số: 1) $e-1$; 2) 1 ; 3) $\frac{1}{2}$.

Bài 7:

Tính các tích phân xác định sau:

$$1) \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx$$

$$8) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$$

$$2) \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$9) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$10) \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$4) \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$11) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$$

$$5) \int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$$

$$12) \int_0^1 e^{x-e^x} dx$$

$$6) \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

$$13) \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$7) \int_0^2 \frac{dx}{3+2\cos x}$$

$$14) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+5}} dx$$

Bài 8:

Chúng minh rằng: $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

Áp dụng:

$$1) \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$$

$$2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Hướng dẫn: Đặt $t = \pi - x$; 1) π ; 2) $\frac{\pi^2}{4}$.

Bài 9:

Cho $a \neq 0, b \neq 0$. Chúng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Hướng dẫn:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|ab|}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx + \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

Bài 10*:

Tính các tích phân xác định sau:

$$1) \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$5) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

$$6) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^4 x} dx$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} dx$$

$$7) \int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

$$4) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

Đáp số: 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 2) ; 3) $\frac{\pi}{8} \ln 2$; 4) $\frac{\pi}{8} \ln 2$; 5) ; 6) ; 7) $\frac{\pi}{4}$.

Bài 11:

Tính các tích phân suy rộng:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$7) \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{e^{3x}} dx$$

$$3) \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

$$9) \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$10) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx$$

$$11) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$$

$$12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$6) \int_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$$

Đáp số:

$$1) \frac{\pi^2}{8}; 2) \frac{\pi}{2}; 3) \frac{1}{2}; 4) -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \right); 5) +\infty$$

$$6) \frac{\pi}{2}; 7) \frac{1}{4}; 8) -\frac{1}{9}; 9) \frac{256}{15}; 10) 1; 11) \frac{\pi}{2}; 12) 2.$$

Bài 12:

Tính các tích phân suy rộng:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(1+x^n)}$$

$$\text{Đáp số: } 1) \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; 2) \frac{\pi}{2} - 1; 3) \frac{\pi}{4}.$$

Bài 13:

Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5}$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + 2x + 1}$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{2+x^2} dx$$

$$3) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x}{2+x} dx$$

$$4) \int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 3x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2 \cos^2 x}$$

$$9) \int_1^{+\infty} \sin x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$$

$$10) \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$$

Đáp số:

1) hội tụ; 2) hội tụ; 3) hội tụ; 4) hội tụ; 5) phân kỳ; 6) hội tụ;
7) phân kỳ; 8) phân kỳ; 9) hội tụ; 10) phân kỳ.

Bài 14:

Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$6) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

$$7) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}} dx$$

$$3) \int_0^1 \frac{\sin x \ln x}{x} dx$$

$$8) \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$9) \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt[3]{(1-x^3) \cos \frac{\pi x}{2}}} dx$$

$$5) \int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Đáp số:

1) hội tụ; 2) phân kỳ; 3) phân kỳ; 4) phân kỳ; 5) hội tụ; 6) hội tụ;
7) hội tụ; 8) hội tụ; 9) hội tụ.

Bài 15:

Cho hàm doanh thu biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 50 - 2Q - 3Q^2$. Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Đáp số: $TR(Q) = 50Q - Q^2 - Q^3$; $P = 50 - Q - Q^2$.

Bài 16:

Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 32 + 18Q - 12Q^2$ và $FC = 43$. Hãy tìm hàm tổng chi phí và chi phí khả biến.

Đáp số:

$$TR(Q) = 43 + 32Q + 9Q^2 - 4Q^3; VC = 32Q + 9Q^2 - 4Q^3.$$

Bài 17:

Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 12e^{0,5Q}$ và $FC = 36$. Hãy tìm hàm tổng chi phí.

Đáp số: $TC(Q) = 24e^{0,5Q} + 12$.

Bài 18:

Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MR(Q) = 40Q - 16e^{0,4Q}$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu.

Đáp số: $TR(Q) = 40 + 20Q^2 - 40e^{0,4Q}$.

Bài 19:

Cho hàm cầu ngược đối với một loại sản phẩm như sau:

$$P = 42 - 5Q - Q^2$$

Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $P_0 = 6$. Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $248/3$.

Bài 20:

Cho hàm cung đối với một loại sản phẩm như sau:

$$Q_s = \sqrt{P-1} + 2$$

Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $P_0 = 10$. Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất.

Đáp số: $100/3$.

Bài 21:

Cho hàm đầu tư $I(t) = 90t^{\frac{2}{3}}$. Tìm hàm quỹ vốn $K(t)$ biết quỹ vốn tại $K(1) = 100000$.

Đáp số: $K(t) = 54t^{\frac{5}{3}} + 99946$.

Bài 22:

Cho hàm đầu tư $I(t) = I_0 e^{rt}$, ($I_0 > 0$, $r > 0$). Tìm hàm quỹ vốn $K(t)$ biết quỹ vốn ban đầu $K(0) = K_0$.

Đáp số: $K(t) = \frac{I_0}{r}(e^{rt} - 1) + K_0$.

Chương 6

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm được các khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến và đạo hàm riêng, vi phân toàn phần.
2. Biết vận dụng đạo hàm riêng và vi phân toàn phần vào trong phân tích kinh tế.
3. Biết giải bài toán cực trị không có điều kiện ràng buộc (cực trị tự do); bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc là phương trình bằng phương pháp nhân tử Lagrange.
4. Nắm được các mô hình bài toán cực trị trong kinh tế và phương pháp giải.

B. Bài tập

Bài 1:

Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{5 + 3x^2 + 2y^2}$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{2}{3x^2 + 2y^2}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Đáp số: 1) 0 ; 2) $\frac{2}{11}$; 3) 0.

Bài 2:

Chứng minh hàm số sau liên tục tại $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Hướng dẫn : Kiểm tra $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Bài 3:

Tính đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số sau:

1. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy^2 + 3x + 4y + 10$

2. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

3. $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

4. $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

Đáp số:

1) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x - 2y^2 + 3, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 4xy + 4$.

2) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

4) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos \frac{y}{x}$.

Bài 4:

Dùng quy tắc xích tìm $\partial z / \partial s$ và $\partial z / \partial t$.

1. $z = x^2 y^3$, $x = s \cos t$, $y = s \sin t$

2. $z = \arcsin(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

3. $z = e^{x+2y}$, $x = \frac{s}{t}$, $y = \frac{t}{s}$

4. $z = e^r \cos \theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

Đáp số:

1) $\frac{\partial z}{\partial s} = 5s^4 \sin^3 t \cos^2 t$; $\frac{\partial z}{\partial t} = (3\sin^2 t \cos^3 t - 2\sin^4 t \cos t)s^5$

2) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{2(t+s)}{\sqrt{1-(s^2+t^2-1+2st)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2(t+s)}{\sqrt{1-(s^2+t^2-1+2st)^2}}$

3) $\frac{\partial z}{\partial s} = e^{\frac{s}{t} + \frac{2t}{s}} \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{s^2} \right)$; $\frac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{s}{t} + \frac{2t}{s}} \left(\frac{2}{s} - \frac{s}{t^2} \right)$.

4) $\frac{\partial z}{\partial s} = te^{ts} \cos \sqrt{s^2 + t^2} - \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \sqrt{s^2 + t^2}$,
 $\frac{\partial z}{\partial t} = se^{ts} \cos \sqrt{s^2 + t^2} - \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \sqrt{s^2 + t^2}$.

Bài 5:

Dùng công thức đạo hàm hàm ẩn tìm $\partial z / \partial x$ và $\partial z / \partial y$.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 2. $yz = \ln(x + z)$

3. $x - z = \arctan(yz)$ 4. $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$

Đáp số:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3yz}{3xy - 2z}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - 3xz}{3xy - 2z}.$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy + yz - 1}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz + z^2}{1 - xy - yz}.$$

$$3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + y^2 z^2}{1 + y + y^2 z^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{1 + y + y^2 z^2}.$$

$$4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - yz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) - 3}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2 - xz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) - 3}.$$

Bài 6:

Tính vi phân toàn phần của hàm số sau:

$$1. f(x, y) = \arcsin(xy)$$

$$2. f(x, y) = \arctan\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$$

$$\text{Đáp số: } 1) df(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 y^2}} dx + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 y^2}} dy.$$

$$2) df(x, y) = \frac{2y}{(x + y)^2} dx - \frac{2x}{(x + y)^2} dy.$$

Bài 7:

Tính đạo hàm riêng cấp 2.

$$1. f(x, y) = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

$$2. f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Đáp số:

$$1) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 24x + 6y; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x + 6y; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 6x + 6y.$$

$$2) \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Bài 8:

Tính vi phân toàn phần cấp 2.

$$1. f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2. f(x,y) = \arccos(x+y)$$

Đáp số:

$$1) d^2f(x,y) = \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 - \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy + \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy^2.$$

2)

$$d^2f(x,y) = -\frac{x+y}{\sqrt{[1-(x+y)^2]^3}} dx^2 - 2\frac{x+y}{\sqrt{[1-(x+y)^2]^3}} dx dy - \frac{x+y}{\sqrt{[1-(x+y)^2]^3}} dy^2.$$

Bài 9:

Chứng minh rằng:

$$1. \text{Hàm số } f(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ thỏa } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$2. \text{Hàm số } f(x,y) = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ thỏa } x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$$

Hướng dẫn: Tính đạo hàm riêng rồi thay vào đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Bài 10:

Tính gần đúng biểu thức sau :

$$1. A = \sqrt{(2,97)^2 + (4,05)^2}$$

$$2. B = \sqrt[3]{(2,03) + (5,04)^2}$$

Đáp số: 1) $A = 5,022$; 2) $B = 3,013$.

Bài 11:

Khảo sát cực trị các hàm hai biến sau:

$$1. f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x + 8$$

$$2. f(x, y) = 4x + 2y - x^2 - y^2$$

$$3. f(x, y) = (x + y - 9)(4x + 3y) - 6xy$$

$$4. f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 3xy$$

$$5. f(x, y) = x + y - ye^x$$

$$6. f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$$

$$7. f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$8. f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 20$$

$$9. f(x, y) = xy - \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$$

Đáp số:

1) $(1, 0)$ là cực tiểu;

2) $(2, 1)$ là cực đại;

3) $(189/47, 180/47)$ là cực tiểu;

4) $(0,0)$ không là cực trị, $(1/4, 1/2)$ là cực tiểu;

5) $(0,1)$ không là cực trị;

6) $(1/2, -1)$ là cực tiểu;

7) $(1,2); (-1,-2)$ không là cực trị; $(2,1)$ là cực tiểu; $(-2,-1)$ là cực đại;

8) $(0,0)$ không là cực trị; $(2,2)$ là cực tiểu;

9) $(0,0)$ không là cực trị; $(1,1)$ là cực đại.

Bài 12:

Khảo sát cực trị các hàm ba biến sau:

1. $f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 6y - 16z + 100.$

2. $f(x, y, z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z} + 2015.$

Đáp số:

1) $M(6,3,4)$ cực tiểu;

2) $M_1(1,1,1)$ cực tiểu, $M_2(-1,1,-1)$ cực đại.

Bài 13*:

Tìm cực trị của hàm $z = z(x, y)$ cho bởi phương trình sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

Đáp số: $(1,-2)$ cực tiểu.

Bài 14:

Tìm cực trị của các hàm hai biến với ràng buộc sau:

1. $f(x, y) = 2x^2 - 6y^2$, với ràng buộc $x + 2y = 6.$

2. $f(x, y) = x^2 + 3xy - 5y^2$, với ràng buộc $2x + 3y = 6.$

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$, với ràng buộc $3x + 2y = 6$.

4. $f(x, y) = x + y$, với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$.

5. $f(x, y) = xy$, với ràng buộc $x + y = 1$.

6. $f(x, y) = xy$, với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$.

7. $f(x, y) = x + y$, với ràng buộc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Đáp số:

1) $(-18, 12)$ cực tiểu.

2) $(3, 0)$ cực đại.

3) $(18/13, 12/13)$ cực tiểu.

4) $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ cực tiểu; $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ cực đại;

5) $(1/2, 1/2)$ cực đại.

6) $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2); (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ cực tiểu;

$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ cực đại.

7) $(-a^2/\sqrt{a^2+b^2}, -b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ cực tiểu;

$(a^2/\sqrt{a^2+b^2}, b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ cực đại.

Bài 15*:

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f trên tập D .

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

$$2. f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2, \quad D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

$$3. f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$4. f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y, \quad D \text{ là tứ giác có 4 đỉnh: } (-2, -2), (-2, 3), (2, 2), (2, 3).$$

Đáp số:

$$1) f_{\max} = f(0, 1) = 5; \quad f_{\min} = f(0, 0) = 4.$$

$$2) f_{\min} = f(-1, -1) = f(1, 1) = 0; \quad f_{\max} = f(3, \sqrt[3]{3}) = 83 - 9\sqrt[3]{3}.$$

$$3) f_{\min} = f(0, 0) = 0; \quad f_{\max} = f(1/2, -\sqrt{3}/2) = f(1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{13}{16}.$$

$$4) f_{\max} = f(-2, 2) = 30; \quad f_{\min} = f(-2, -2) = f(2, -2) = -18.$$

Bài 16:

Tính hệ số co giãn của các hàm sau tại điểm cho trước.

$$a) Q(P_1, P_2) = 6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2, \quad \text{tại } (20, 30).$$

$$b) Q(K, L) = 120K^{1/3}L^{2/3}$$

$$\text{Đáp số: a) } \varepsilon_Q = -1,15. \quad b) \varepsilon_Q = 1.$$

Bài 17:

Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là:

$$Q_1 = 25 - 0,5P_1; \quad Q_2 = 30 - P_2$$

Và hàm chi phí kết hợp là $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$.
Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $Q_1 = 7, Q_2 = 4$.

Bài 18:

Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm là:

$$Q_1 = 50 - 0,5P_1, \quad Q_2 = 76 - P_2$$

Và hàm chi phí kết hợp là $TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 55$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $Q_1 = 8, Q_2 = 10$.

Bài 19:

Cho hàm sản xuất của hãng $Q = 10K^{0,3}L^{0,4}$, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K, L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $L = 51200, K = 2560000$.

Chương 7

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A. Yêu cầu đối với sinh viên

1. Nắm vững các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân.
2. Biết cách giải một số phương trình vi phân thường cấp 1 và phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng số.

B. Bài tập

Bài 1:

Giải các phương trình vi phân cấp 1.

1. $y' + 2y = 4x$

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

3. $y' + y = \cos x$

4. $(1+x)ydx + (1-y)x dy = 0$

5. $y' = \frac{x+y+2}{x-y+4}$

6. $y' - y \sin x = \sin x \cos x$

7. $y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0$

8. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = \frac{1}{2}e^2$

9. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$

$$10. y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0$$

Đáp số:

$$1) y(x) = 2x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}; \quad 2) y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2};$$

$$3) y(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C;$$

$$4) \ln|xy| + x - y = C \vee x = 0 \vee y = 0;$$

$$5) \arctan\left(\frac{y-1}{x+3}\right) = \ln\left(\sqrt{(y-1)^2 + (x+3)^2}\right) + C;$$

$$6) y(x) = -\cos x + 1 + Ce^{-\cos x};$$

$$7) y(x) = \arcsin x - 1 + Ce^{-\arcsin x}; \quad 8) y(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x;$$

$$9) y(x) = \left[\frac{1}{18} e^{x^3} (x^6 + 2x^3) \right]^3; \quad 10) y(x) = \frac{x}{\cos x}.$$

Bài 2:

Giải các phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất sau:

$$1. y'' + y' - 2y = 0$$

$$7. y'' + y' - 6y = 0$$

$$2. y'' - 9y = 0$$

$$8. y'' + 4y = 0$$

$$3. y'' - 4y' = 0$$

$$9. y'' + 6y' + 12y = 0$$

$$4. y'' + y = 0$$

$$10. y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$5. y'' + 6y' + 13y = 0$$

$$11. y'' - 2y' - y = 0$$

$$6. y'' - 10y' + 25y = 0$$

$$12. 4y'' - 20y' + 25y = 0$$

Đáp số:

$$1) y(x) = Ae^x + Be^{-2x}; 2) y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x};$$

$$3) y(x) = Ae^{4x} + B; 4) y(x) = A \sin x + B \cos x;$$

$$5) y(x) = e^{-3x} (A \sin 2x + B \cos 2x); 6) y(x) = Ae^x + Be^{5x};$$

$$7) y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}; 8) y(x) = A \sin 2x + B \cos 2x;$$

$$9) y(x) = e^{-3x} (A \sin \sqrt{3}x + B \cos \sqrt{3}x);$$

$$10) y(x) = e^{-x} (A \sin 2x + B \cos 2x);$$

$$11) y(x) = Ae^{(1+\sqrt{2})x} + Be^{(1-\sqrt{2})x}; 12) y(x) = (Ax + B)e^{\frac{5}{2}x}.$$

Bài 3:

Giải các phương trình vi phân với điều kiện đầu sau:

$$1. y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 14$$

$$2. 4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

$$3. y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$$

$$4. y'' = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$5. y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9$$

$$6. y'' + 4y = \sin 2x + 1, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = 0$$

Đáp số:

$$1) y(x) = 2e^x + 4e^{3x}; 2) y(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}x};$$

$$3) y(x) = 3e^{-2x} \sin 5x; 4) y(x) = 2x - 1 + e^{-x}(x + 2);$$

$$5) y(x) = \frac{11}{4}e^{3x} + \frac{1}{8}e^x + \frac{1}{8}e^{5x};$$

$$6) y(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{4}.$$

Bài 4:

Giải các phương trình vi phân không thuần nhất sau

$$1. y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

$$9. y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$$

$$2. y'' - 2y' + y = 1 + x$$

$$10. y'' + y = \tan x$$

$$3. y'' - 2y' + y = e^x(1 + x)$$

$$11. y'' - 4y' = -12x^2 - 6x - 4$$

$$4. y'' + y = \sin x + \cos 2x$$

$$12. y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$$

$$5. 2y'' + y' - y = 2e^x$$

$$13. y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$$

$$6. y'' + a^2 y = e^x, \quad a > 0.$$

$$14. y'' + y = \cos x + \cos 2x$$

$$7. y'' - 7y' + 6y = \sin x$$

$$15. y'' - y = x \cos^2 x$$

$$8. y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$$

$$16. y'' = 6y' + 9y = xe^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Đáp số:

$$1) y(x) = A \sin x + B \cos x + \sin x \cdot \ln |\sin x| - \cos x \cdot \ln |\sin x|;$$

$$2) y(x) = (Ax + B)e^x + x + 3;$$

$$3) y(x) = (Ax + B)e^x + e^x \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right);$$

$$4) y(x) = A \sin x + B \cos x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x;$$

$$5) y(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{-x} + e^x;$$

$$6) y(x) = A \sin ax + B \cos ax + \frac{1}{1+a^2} e^x;$$

$$7) y(x) = Ae^{6x} + Be^x + \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x;$$

$$8) y(x) = (Ax + B)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27};$$

$$9) y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x};$$

$$10) y(x) = A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|;$$

$$11) y(x) = A + Be^{4x} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x;$$

$$12) y(x) = Ae^{5x} + Be^{4x} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x \right) e^{4x};$$

$$13) y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \sin x + 2 \cos x;$$

$$14) y(x) = A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x;$$

$$15) y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{25} \sin 2x - \frac{1}{10}x \cos 2x;$$

16) Với $\alpha = -3$ thì $y(x) = (Ax + B)e^{-3x} + \frac{1}{6}x^3e^{-3x}$;

Với $\alpha \neq -3$ thì $y(x) = (Ax + B)e^{-3x} + \left[\frac{1}{(\alpha + 3)^2}x - \frac{2}{(\alpha + 3)^3} \right] e^{\alpha x}$.

Bài 5:

Tìm hàm cầu Q_D cho biết hệ số co giãn của cầu theo giá là:

$$E_D = -\frac{5P + 2P^2}{Q} \text{ và lượng cầu ở mức giá } P = 10 \text{ là } 500.$$

Đáp số: $Q = 650 - 5P - P^2$.

Bài 6:

Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng:

$$Q_S(t) = -2 + P(t); \quad Q_D(t) = 8 - 4P(t) - 2P'(t) - P''(t)$$

Với giá ban đầu $P(0) = 3$ và $P'(0) = 1$. Tìm sự biến động của giá $P(t)$ theo thời gian và giả thiết cung cầu thỏa mãn tại mọi thời điểm.

Đáp số: $P(t) = 2 + e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)$.

MỘT SỐ ĐỀ LUYỆN TẬP

ĐỀ SỐ 01

Câu 1 (2 điểm)

Cho hai ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Tính AB , BA , $4A+5B$.

2) Tìm X sao cho $AX = B$.

Câu 2 (2 điểm)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 34 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})}{(1 - x)^2} \right]$$

2) Tính tích phân sau:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng.

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$$

2) Khảo sát cực trị hàm số: $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân: $y'' - 3y' = e^{3x} + 3x + 5$

2) Cho hàm số f có $f(6) = 1, f'(6) = -2$ và $g(x) = \frac{d}{dx} [x^2 f(3x)]$. Tính $g(2)$.

ĐỀ SỐ 02

Câu 1 (2 điểm)

Cho hai ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Tính AB , BA , $3A+4B$.

2) Tìm X sao cho $XA = B$.

Câu 2 (2 điểm)

Định a để hệ phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{cases} 2x + y = 2a - 1 \\ ax + 5y = 11 \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - 1 - x} \right)$

2) Tính tích phân sau: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{x^5 + 5}} dx$$

2) Khảo sát cực trị hàm số:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + 2013$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân: $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

2) Khai triển Maclourent của hàm số sau đến x^5 :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

ĐỀ SỐ 03

Câu 1 (2 điểm)

Cho hai ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A, nếu có.

2) Tìm ma trận X và ma trận Y sao cho:

$$\begin{cases} A(X + Y) = B \\ (X - Y)A^T = B^T \end{cases}$$

Câu 2 (2 điểm)

Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 2}}$

2) Tính tích phân sau: $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}} dx$$

2) Khảo sát cực trị hàm số:

$$f(x, y) = -2x^2 - 2y^2 + 12x + 8y + 2012$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y' = 2x + 3$

2) Khai triển Maclorent hàm số sau tới x^5 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

ĐỀ SỐ 04

Câu 1 (2 điểm)

Cho hai ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Tính AB , BA , $3A-4B$.

2) Tìm X sao cho $AX = B$.

Câu 2 (2 điểm)

Định a để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x + y = 2a - 1 \\ ax + 5y = 11 \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

2) Tính tích phân sau: $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng.

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

2) Khảo sát cực trị hàm số:

$$f(x, y) = 9x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x - 0,03y$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân: $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$

2) Khai triển Maclourent của hàm số sau đến x^5 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

ĐỀ SỐ 05

Câu 1 (2 điểm)

Cho các vec tơ sau:

$$\mathbf{x} = (5, 9, m), \mathbf{u} = (4, 4, 3), \mathbf{v} = (7, 2, 1), \mathbf{w} = (4, 1, 6)$$

1) $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ hay không?

2) Định m để $\mathbf{x}$ là tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Câu 2 (2 điểm)

Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \quad \quad + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{1 - \sqrt{1 - \arctan x}} \right)$

2) Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{2+x^3} \sqrt[3]{8+x^5}}$$

2) Khảo sát cực trị của hàm số sau:

$$f(x, y) = x + y + \frac{81}{xy} + 2012$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân sau:

$$y' - y \tan x = -2e^{\sin x} ; y(0) = 3$$

2) Khai triển Maclorant của hàm số sau đến x^5 :

$$f(x) = x + \sqrt{x+1}$$

ĐỀ SỐ 06

Câu 1 (2 điểm)

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, xét hệ vectơ:

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2), u_3 = (1, 2, 3)\}$$

- 1) Chứng minh S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- 2) Tìm tọa độ của $x = (6, 9, 14)$ trong cơ sở S.

Câu 2 (2 điểm)

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

- a) Xác định m để f liên tục tại $x = 0$.
 - b) Tìm $f'(0)$ ứng với m vừa tìm được ở câu a.
- 2) Tính tích phân:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$$

2) Khảo sát cực trị của hàm số sau:

$$f(x, y) = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y + 2012$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân sau:

$$y'' + 2y' + y = e^x(1+x)$$

2) Cho hàm số $f(x) = x \sin x$. Tính $f^{(5)}(0)$.

ĐỀ SỐ 07

Câu 1 (2 điểm)

Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng hai phương pháp:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

Câu 2 (2 điểm)

Định a để ma trận sau khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Câu 3 (2 điểm)

1) Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x+4}$

2) Tính tích phân: $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 5} dx$

Câu 4 (2 điểm)

1) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng sau:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx$$

2) Khảo sát cực trị của hàm số sau:

$$f(x, y) = x^{0,4} y^{0,8} \text{ với ràng buộc } 5x + 2y = 240$$

Câu 5 (2 điểm)

1) Giải phương trình vi phân sau:

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$$

2) Tìm tập xác định và tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đức Bằng, Nguyễn Tuấn Duy, *Tài liệu ôn tập toán cao cấp*, (lưu hành nội bộ), Đại học Tài chính - Marketing, 2013.
2. Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, *Toán cao cấp*, NXB Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2006.
3. Nguyễn Huy Hoàng, *Bài Tập Toán Cao Cấp*, NXB Đại học Kinh tế Quốc Dân, 2008.
4. Lê Văn Hốt, *Toán Cao Cấp*, (lưu hành nội bộ), Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh, 1997.
5. Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, *Giáo trình giải tích hàm một biến*, NXB Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2002.
6. Trần Minh Thuyết, *Giáo trình toán cao cấp*, NXB tài chính, 2008.
7. Lê Đình Thúy, *Toán Cao Cấp cho các nhà kinh tế*, NXB Đại học Kinh tế Quốc Dân, 2010.