



TỔNG HỢP CÁC KIẾN THỨC QUAN TRỌNG VỀ GIỚI HẠN TOÁN 11

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa 1:** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến dương vô cực và viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ viết tắt là $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$, nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- **Định nghĩa 2:** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần đến dương vô cực và viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, viết tắt là $\lim u_n = a$ hoặc $u_n \rightarrow a$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương
- $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$
- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$

II. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 1:

- Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì
 - $\lim(u_n + v_n) = a + b$
 - $\lim(u_n - v_n) = a - b$
 - $\lim(u_n v_n) = a.b$
 - $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

III. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ có công bội q với $|q| < 1$ gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng S của cấp số nhân đó là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$.

IV. Giới hạn vô cực

1. Định nghĩa:

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $u_n \rightarrow +\infty$
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó. Khi đó ta viết $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \rightarrow -\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt



- a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương
- b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

3. Định lý 2:

- a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$
- b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$
- c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim (u_n v_n) = +\infty$

V. Một số lưu ý:

Khi làm bài tập trắc nghiệm, ta có thể làm như bài tập tự luận, sau khi tính toán sẽ chọn kết quả phù hợp với yêu cầu của bài toán

Ngoài ra có thể sử dụng các nhận xét để có kết quả nhanh chóng, chính xác hơn. Có một số bài tập có thể nhận xét nhanh để loại trừ được những phương án không phù hợp

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Định lý:

- a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)
- b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L \geq 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

Định lý về giới hạn của tích và thương hai hàm số chỉ áp dụng được khi các hàm số có giới hạn hữu hạn

Sau đây là một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số có giới hạn vô cực.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ bằng $\pm\infty$ (dấu “+” nếu hai giới hạn cùng dấu và dấu “-” nếu hai giới hạn khác dấu).



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty \text{ (dấu “+” nếu hai giới hạn cùng dấu và dấu “-” nếu hai giới hạn khác dấu.)}$$

Các quy tắc trên vẫn được áp dụng cho các trường hợp :

$$x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty \text{ và } x \rightarrow -\infty$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số không liên tục tại $x = x_0$ gọi là gián đoạn tại x_0

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

3. Một số định lý cơ bản

Định lý 1: Hàm số đa thức liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số liên tục trên tập xác định của chúng

Định lý 2. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_0

b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

Định lý 3. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$



Vững vàng nền tảng, Khai sáng tương lai

Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.