



ỨNG DỤNG CỦA ĐƠN ĐIỀU TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp

Biến đổi phương trình, bất phương trình đã cho thành dạng $f(x) = g(x)$,

$f(x) > g(x), \dots$ Sau đó lập bảng biến thiên của $f(x)$, dựa vào bảng biến thiên này sẽ tìm được các giá trị của tham số thỏa yêu cầu của bài toán.

Dựa vào định nghĩa hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến ta thấy

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên D thì :

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \text{ và } f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y.$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và nghịch biến trên D thì :

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \text{ và } f(x) > f(y) \Leftrightarrow x < y.$$

Từ đó gọi cho chúng ta ứng dụng vào các bài toán chứng minh bất đẳng thức và các bài toán giải phương trình, bất phương trình. Cụ thể ta có các tính chất sau:

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a; b)$ thì số nghiệm của phương trình : $f(x) = k$ (trên $(a; b)$) không nhiều hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$
 $\forall u, v \in (a; b)$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình : $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Tính chất 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$ ($u < v$) $\forall u, v \in D$.

Tính chất 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng liên tục $(a; b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Hệ quả 1: Nếu phương trình $f(x) = 0$ có m nghiệm thì phương trình $f'(x) = 0$ có $m - 1$ nghiệm.

Hệ quả 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

Chú ý: Sử dụng tính đơn điệu để giải phương trình – bất phương trình ta thường đi theo hai hướng sau:

Hướng 1: Đưa phương trình về dạng $f(x) = f(x_0)$, trong đó $y = f(t)$ là một hàm số liên tục và luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên tập đang xét.

Để làm theo hướng này, chúng ta cần nắm trước một nghiệm của phương trình và nhận diện được tính đơn điệu của hàm số f .

- Để nắm nghiệm, ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm.

Cụ thể: Để tìm một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ ta thực hiện như sau

Bước 1: Nhập biểu thức $f(x)$ (Dùng phím ALPHA+ X)

Bước 2: Dùng lệnh giải phương trình: SHIFT+CALC (SOLVE) nhập giá trị của X (nhập giá trị bất kì) =.

• Để nhận diện được tính đơn điệu của hàm số f , chúng ta cần chú ý

*Tổng hai hàm số đồng biến là một hàm số đồng biến

* Hàm số đối của một hàm số đồng biến là một hàm số nghịch biến.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến thì $y=\sqrt[n]{f(x)}$ là hàm số đồng biến.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương thì hàm số $y=\frac{1}{f(x)}$ là một hàm nghịch biến.

Hướng 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f(u)=f(v)$, trong đó u,v là các hàm theo x .

Làm theo hướng ta thường áp dụng khi gặp phương trình chứa hai phép toán ngược nhau.

Chú ý 1:

Ký hiệu K là **một** đoạn, **một** khoảng hoặc **một** nửa khoảng.

• Nếu $f(x)$ **liên tục** trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có **ít nhất** một nghiệm $c \in (a;b)$.

• Nếu $f(x)$ **liên tục** và **đơn điệu** trên K thì phương trình $f(x)=0$ có **không quá một nghiệm** trên K .

Chú ý 2:

Nếu $f(x)$ liên tục và tăng trên K , $g(x)$ liên tục và giảm (hoặc là hàm hằng) trên K thì phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá một nghiệm trên K .

• Nếu phương trình $f'(x)=0$ có n nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có không quá $n+1$ nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

• Tổng của 2 hàm tăng trên K là một hàm tăng trên K , tổng của 2 hàm giảm trên K là một hàm giảm trên K .

• Nếu $f(x)$ là hàm tăng trên K thì $a.f(x)$ tăng trên K nếu $a>0$ và $a.f(x)$ giảm trên K nếu $a<0$.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$1. 4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$$

$$2. \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$$

$$3. \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$4. \sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0$$

Lời giải.

1. Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(2x)^3 + 2x = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1} \quad (*)$



Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

2. Nhận xét đặc điểm các biểu thức dưới dấu căn ta thấy ở mỗi vế biểu thức dưới dấu căn hơn kém nhau

1. Do đó nếu ta đặt $u = \sqrt[3]{x+1}, v = \sqrt[3]{2x^2}$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{u^3+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v \Leftrightarrow f(u) = f(v).$$

Trong đó $f(t) = \sqrt[3]{t^3+1} + t$, có: $f'(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} + 1 > 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến.

$$\text{Do đó: } f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2x^2 = x+1 \Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 1, x = -\frac{1}{2}$.

$$3. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$$

Dễ thấy $x = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = 6$ không là nghiệm phương trình.

Cách 1: Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}; 6\right)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right] + 6x - 14, x \in \left(-\frac{1}{3}; 6\right)$$

$$\bullet x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} < 2\sqrt{2} - \sqrt{\frac{11}{3}},$$

$$3x^2 - 14x - 8 \leq -3 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\bullet x \in \left[\frac{7}{3}; 6\right): f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{7}{3}; 6\right) \text{ và } f(5) = 0.$$

Do đó trên $\left[\frac{7}{3}; 6\right)$ phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 5$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

$$\text{Cách 2: Phương trình: } \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$



$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4) + (1-\sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0 \quad (*)$$

Vì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0$, $x \in \left(-\frac{1}{3}; 6\right)$ nên phương trình

$$(*) \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

4. Điều kiện: $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Dễ thấy, $x=-1$ hoặc $x=\frac{5}{2}$ không là nghiệm phương trình.

Phương trình cho viết lại: $(\sqrt{3x+3}-3) - (\sqrt{5-2x}-1) - (x-2)(x^2-x-12) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1} - (x-2)(x^2-x-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2 + x + 12 \right] = 0$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + x + 12$, với $x \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = -2x + 1$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\min_{x \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)} f = f\left(\frac{5}{2}\right) > 0, \text{ do đó } \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2 + x + 12 > 0, \text{ mọi } x \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$$

Vậy, phương trình cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình: $2(x-2)(\sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5}) = 3x-1$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} = \frac{3x-1}{2x-4}$



$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} - \frac{3x-1}{2x-4} = 0$$

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} - \frac{3x-1}{2x-4}$ với x thuộc $\left[\frac{5}{2}; -\infty\right)$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}} + \frac{10}{(2x-4)^2} > 0$ với $\forall x > \frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2}; -\infty\right) \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm

Và $f(3) = 0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài 2 : Giải phương trình: $\sqrt{3+\sin x} - \sqrt{2-\sin x} = 1$

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \leq 1$

Khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{3+t} - \sqrt{2-t} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+t} = 1 + \sqrt{2-t}$ (*)

Dễ thấy: + Hàm số $f(t) = \sqrt{3+t}$ là hàm đồng biến trên $D = [-1; 1]$

+ Hàm số $g(t) = 1 + \sqrt{2-t}$ là hàm nghịch biến trên $D = [-1; 1]$

Từ (*) suy ra: $f(t) = g(t)$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Ta thấy $t = 1$ là thỏa phương trình (*), do đó: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 3 : Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2 + 1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $-4 \leq x \leq 1; y \in \mathbb{R}$.

Ta có phương trình đầu tương đương $2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình đầu $\Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$

Thế vào phương trình thứ hai ta được $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$ (*)

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4}$, liên tục trên $[-4; 1]$,



Ta có $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0 \quad \forall x \in (-4;1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên

đoạn $[-4;1]$.

Lại có $g(-3)=4$ nên $x=-3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Với $x=-3$ suy ra $y=2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;2)$

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$1. \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Trước hết, đây là bài toán cơ bản và có nhiều cách giải (15 cách giải). Trong khuôn khổ ứng dụng đạo hàm, tác giả giới thiệu đến bạn đọc 3 cách giải đơn giản nhất.

1. Cách 1: Hệ phương trình cho viết lại:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}.$$

Đặt $u = x - \frac{1}{2}, v = y + \frac{1}{2}$

Hệ đã cho thành
$$\begin{cases} u^3 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{45}{4}u = (v+1)^3 - \frac{3}{2}(v+1)^2 - \frac{45}{4}(v+1) \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{45}{4}t$ với $|t| \leq 1$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - \frac{45}{4} < 0$ với mọi $t \in (-1;1)$

$\Rightarrow f(u) = f(v+1) \Rightarrow u = v+1 \Rightarrow (v+1)^2 + v^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} v=0 \\ u=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} v=-1 \\ u=0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} v=0 \\ u=1 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Với $\begin{cases} v=-1 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm là $(x;y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Cách 2:

Ta có: $x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12x + 23 = (y+1)^3 - 12y$



$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (2) nhận thấy
$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \\ \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ (1), xét $f(t) = t^3 - 12t$ với $t \in (-2; 2) \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 < 0, \forall t \in (-2; 2)$

(vì $x-1, y+1 \in (-2; 2)$) nên $\Leftrightarrow x = y + 2$. Thay $x = y + 2$ vào (2) ta được:

$$(y+2)^2 + y^2 - (y+2) + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y^2 + 8y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}; x = \frac{1}{2} \quad \text{hoặc} \quad y = -\frac{1}{2}; x = \frac{3}{2}$$

Hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Cách 3:

Ta có hệ đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Đặt $a = x - 1, b = y + 1$ ta được hệ:
$$\begin{cases} a^3 - 12a = b^3 - 12b \\ \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Từ $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq a + \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq b - \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq \frac{9}{4} \\ b^2 \leq \frac{9}{4} \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$, ta có $f(t)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t) = 3(t^2 - 4) < 0$, với $t^2 \leq \frac{9}{4}$. Nên từ $a^3 - 12a = b^3 - 12b$ ta có $a = b$.

Do đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \pm \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.



2. Điều kiện: $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$.

Cách 1: $(4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x + 2(y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0$
 $\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}$ có dạng $f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y})$

Xét hàm số $f(t) = t(t^2 + 1)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó (2) viết lại $4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7(3)$.

Vì $x = 0, x = \frac{3}{4}$ không là nghiệm của (3).

Xét hàm số: $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Ta có $g'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow g(x)$ nghịch

biến trên khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$ và $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow (3)$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.

Chú ý 1: Ta có thể đặt: $u = 2x \Rightarrow u \leq \frac{3}{2}, v = \sqrt{5 - 2y}, v \geq 0 \Rightarrow y = \frac{5 - v^2}{2}$

Phương trình (1) $\Rightarrow (u^2 + 1)\frac{u}{2} - \frac{v^2 + 1}{2}v = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow u = v \Rightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y}$ vì $u^2 + uv + v^2 + 1 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$.

Chú ý 2: Đặt: $\sqrt{5 - 2y} = t \Leftrightarrow y = \frac{5 - t^2}{2}$ với $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Rightarrow (4x^2 + 1)x = \frac{t^2 + 1}{2}t \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = t^3 + t$

$\Leftrightarrow (2x - t)(4x^2 + 2xt + t^2 + 1) = 0 \Rightarrow t = 2x \Rightarrow t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$

(2) trở thành $t^2 + \frac{(5 - t^2)^2}{4} + 2\sqrt{3 - 2t} = 7 \Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 8\sqrt{3 - 2t} - 3 = 0 (*)$



Vì $t=0$ hoặc $t=\frac{3}{2}$ không là nghiệm phương trình (*)

Xét hàm: $f(t) = t^4 - 6t^2 + 8\sqrt{3-2t} - 3$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$

Ta có: $f'(t) = 4t^3 - 12t - \frac{8}{\sqrt{3-2t}} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $f(1) = 0$ nên trong khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 2$.

Cách 2: Đặt $u = 2x, v = \sqrt{5-2y}$ Từ (1) $\Rightarrow (u^2 + 1)u - (v^2 + 1)v = 0 \Rightarrow u = v$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 2x = \sqrt{5-2y} \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7(2) \end{cases}$$

Với $t = y - 1, w = \sqrt{3-4x} = \sqrt{3-2u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{3-2t} \geq 0 \\ t^2 = 3-2w \\ w = \sqrt{3-2u} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 3-2t \\ t^2 = 3-2w \\ w^2 = 3-2u \end{cases} \Rightarrow u = t = w = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Cách 3: Điều kiện: $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^3 + x = \left(\frac{\sqrt{2-5y}}{2}\right)^3 + \frac{\sqrt{2-5y}}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2-5y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5-4x^2}{2} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 8\sqrt{3-4x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 5 + 8(\sqrt{3-4x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 - 5) + \frac{16(1-2x)}{\sqrt{3-4x} + 1} = 0 \Leftrightarrow (2x - 1) \left[(2x + 1)(4x^2 - 5) - \frac{16}{\sqrt{3-4x} + 1} \right] = 0 \quad (3)$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow (2x + 1)(4x^2 - 5) < 0 \Rightarrow (2x + 1)(4x^2 - 5) - \frac{16}{\sqrt{3-4x} + 1} < 0 \quad (3) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{y-1} + 3y \\ (x+y)(2x-y) + 4 = -6x-3y \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}, y \geq 1$

Phương trình thứ hai tương đương với: $-y^2 + (x+3)y + 2x^2 + 6x + 4 = 0, \Delta = (3x+5)^2$



Nên có $y + x + 1 = 0$ (vô nghiệm vì $x \geq \frac{1}{3}, y \geq 1$) hoặc $2x - y + 4 = 0$

Với $2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$ thay vào phương trình đầu, nên có:

$$\sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{2x+3} + 3(2x+4) \Leftrightarrow 2(3x-1) + \sqrt{3x-1} = 2(2x+3) + \sqrt{2x+3} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$ với $t \geq 0$ ta có $f'(t) = 4t + 1 > 0, \forall t \geq 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 12$$

Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm $(x, y) = (4; 12)$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Nhận thấy, $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

$$\text{Xét } x > 0. \text{ Từ phương trình thứ hai ta có } 2y + 2y\sqrt{4y^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$ với $\forall t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$, với $\forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên với $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}$$

$$\text{Thay } 2y = \frac{1}{x} \text{ vào phương trình đầu, ta được: } x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6$$

Vế trái của phương trình là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên có nghiệm duy nhất $x = 1$ và hệ phương trình có nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y + 1} = 8x^3 - 2y - 1, x > 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 & (1) \\ \sqrt[3]{3y + 1} = 8x^3 - 2y - 1 & (2) \end{cases}$$



$$(1) \Leftrightarrow (2x+1) - 2(y+1) + \sqrt{(2x+1)(y+1)} = 0$$

$$\text{Điều kiện: } (2x+1)(y+1) \geq 0, \text{ mà } x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1})(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{y+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1})(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{y+1}) = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\text{Thay vào (2): } \sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow (6x+1) + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \quad (3)$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên đồng biến trên $f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, do đó (3)

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \quad \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Nhận thấy $x > 1$ không là nghiệm của phương trình

$$\text{Xét } 0 < x \leq 1: \text{ Đặt } x = \cos \alpha \text{ với } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}. \text{ Vậy hệ có nghiệm } \left(\cos \frac{\pi}{9}; 2 \cos \frac{\pi}{9} \right)$$

$$\text{Bài 8 : Giải hệ bất phương trình: } \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 \\ x^3 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$3x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ với } -1 < x < \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3(x-1)(x+1) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ giảm trên khoảng } \left(-1; \frac{1}{3}\right) \text{ và } f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} > 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm } x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Bài 9 : Giải hệ phương trình sau: } \begin{cases} 2x+1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y+1 = z^3 + z^2 + z \\ 2z+1 = x^3 + x^2 + x \end{cases} \quad (*)$$

Lời giải.



Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y^3 + y^2 + y - 1) \\ y = \frac{1}{2}(z^3 + z^2 + z - 1) \\ z = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x - 1) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t^2 + t - 1), \forall t \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}\right] > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta viết lại hệ phương trình như sau:
$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

Không giảm tổng quát, giả sử: $x = \min\{x, y, z\}$.

Khi đó: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow f(z) \leq f(x) \Rightarrow y \leq z$.

Hay $x \leq y \leq z \leq x \Rightarrow x = y = z$

Với $x = y = z$, xét phương trình: $x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $S_1 = \{-1; -1; -1\}, S_2 = \{1; 1; 1\}$

Bài 10: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = \frac{8}{y} - \sqrt{5y-1} \\ y^2 + 3y + 2 = \frac{8}{z} - \sqrt{5z-1} \\ z^2 + 3z + 2 = \frac{8}{x} - \sqrt{5x-1} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y, z \geq \frac{1}{5}$.

Xét các hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2, g(t) = \frac{8}{t} - \sqrt{5t-1}$.

Khi đó ta có $f'(t) = 2t + 3 > 0, g'(t) = -\frac{8}{t^2} - \frac{5}{2\sqrt{5t-1}} < 0, \forall t > \frac{1}{5}$.

Mà $f(t), g(t)$ là các hàm số liên tục trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $g(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x, y, z\}$.



Nếu $x < y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) < g(x) \Rightarrow f(y) < f(z)$ suy ra
 $y < z \Rightarrow g(y) > g(z) \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$, vô lí vì $x < y$.

Do vậy $x = y$, tương tự lí luận như trên ta được $x = z$ suy ra $x = y = z$. Thay trở lại hệ ta được

$$x^2 + 3x + 2 = \frac{8}{x} - \sqrt{5x-1} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - \frac{8}{x} + \sqrt{5x-1} = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = x^2 + 3x + 2 - \frac{8}{x} + \sqrt{5x-1}, x \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right).$$

Ta thấy hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $h(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x = y = z = 1$.



Vững vàng nền tảng, Khai sáng tương lai

Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.