Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên ĐỀ CHÍNH THỨC	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC: 2020 - 2021 Môn: Toán chuyên Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian phát đề Ngày thi: 16/06/2021

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2021 THPT CHUYÊN KHTN

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Lê Viết Ân – Nguyễn Văn Quý

1. Đề thi

Bài 1 (4.0 *điểm*).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c \neq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc}+\frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc}=\frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2=11, \\ 3xy(x+2y)+31=9x+18y+13xy. \end{cases}$$

Bài 2 (2.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn

$$3^x+29=2^y.$$

b) Xét các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $2(a+b+c)+ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+1}{a^2+10a+21}+\frac{b+1}{b^2+10b+21}+\frac{c+1}{c^2+10c+21}.$$

Bài 3 (3.0 *điểm*). Cho hình thoi $ABCD$ ($\angle BAD < 90^\circ$) có đường tròn nội tiếp (O). Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh CB, CD sao cho MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm P, và tam giác CMN nhọn, không cân. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AD tại các điểm E và F. Gọi K, L theo thứ tự là trực tâm các tam giác BME, DNF.

a) Chứng minh rằng đường thẳng OP đi qua trung điểm I của đoạn thẳng KL.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác CMN. Chứng minh rằng $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=-\frac{1}{2}$.

c) Gọi S, T theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng BD với các đường thẳng EK, FL. Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng NS và MT. Đường tròn nội tiếp tam giác CMN tiếp xúc với đường thẳng MN tại điểm G. Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và GH song song với nhau.

Bài 4 (1.0 *điểm*). Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ thỏa mãn $\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2} = 0$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k với $1 \le k \le 2021$ sao cho

$$\left|\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{ka_k}{1+a_k^2}\right| \le \frac{2k+1}{8}.$$

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (4.0 *điểm*).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c \neq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} = \frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4xy+2x^2y^2 = 11, \\ 3xy(x+2y)+31 = 9x+18y+13xy. \end{cases}$$

Lời giải. a) Gọi A là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} &= \frac{a}{a(a+b)(a+c)+1} \\ &= \frac{a}{a(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a}{(a+b+c)(a+b)(a+c)}.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} = \frac{b}{(a+b+c)(b+c)(b+a)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}A &= \frac{a}{(a+b+c)(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(a+b+c)(b+c)(b+a)} \\ &= \frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2ab+bc+ca}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}\frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2} &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{2ab+bc+ca}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Từ hai kết quả trên, ta dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh.

b) Đặt $a = x + 2y$ và $b = xy$, khi đó từ hệ phương trình đã cho, ta có

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 11, \\ 3ab + 31 = 9a + 13b. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$a^2 + 2b^2 + 3ab + 20 = 9a + 13b,$$

hay

$$(a + b)(a + 2b) + 20 = 5(a + b) + 4(a + 2b).$$

Một cách tương đương, ta có

$$(a + b - 4)(a + 2b - 5) = 0.$$

Suy ra $a + b = 4$ hoặc $a + 2b = 5$.

- **Trường hợp 1: $a + b = 4$.** Thay $a = 4 - b$ vào phương trình $a^2 + 2b^2 = 11$, ta được $(4 - b)^2 + 2b^2 = 11$, hay $(b - 1)(3b - 5) = 0$. Suy ra $b = 1$ hoặc $b = \frac{5}{3}$.
  - Với $b = 1$, ta có $a = 3$. Suy ra $x + 2y = 3$ và $xy = 1$. Giải hệ này, ta dễ dàng tìm được $(x,\ y) = \left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x,\ y) = (1,\ 1)$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
  - Với $b = \frac{5}{3}$, ta có $a = \frac{7}{3}$. Suy ra $x + 2y = \frac{7}{3}$ và $xy = \frac{5}{3}$. Từ đó, ta tính được $(x - 2y)^2 = (x + 2y)^2 - 8xy = -\frac{71}{9} < 0$, mâu thuẫn.
- **Trường hợp 2: $a + 2b = 5$.** Thay $a = 5 - 2b$ vào phương trình $a^2 + 2b^2 = 11$, ta được $(5 - 2b)^2 + 2b^2 = 11$, hay $2(b - 1)(3b - 7) = 0$. Suy ra $b = 1$ hoặc $b = \frac{7}{3}$.
  - Với $b = 1$, ta có $a = 3$. Tương tự như **trường hợp 1**, ta tìm được $(x,\ y) = \left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x,\ y) = (1,\ 1)$.
  - Với $b = \frac{7}{3}$, ta có $a = \frac{1}{3}$. Suy ra $x + 2y = \frac{1}{3}$ và $xy = \frac{7}{3}$. Từ đó, ta tính được $(x - 2y)^2 = (x + 2y)^2 - 8xy = -\frac{167}{9} < 0$, mâu thuẫn.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x,\ y)$ là $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ và $(1,\ 1)$. □

Bài 2 (2.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn

$$3^x + 29 = 2^y.$$

b) Xét các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $2(a + b + c) + ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a + 1}{a^2 + 10a + 21} + \frac{b + 1}{b^2 + 10b + 21} + \frac{c + 1}{c^2 + 10c + 21}.$$

Lời giải. a) Cách 1. Với $x = 1$, ta có $y = 5$. Xét $x \geq 2$, từ phương trình đã cho, ta có $2^y \equiv 29 \equiv 2 \pmod 9$. Từ đó, ta dễ dàng chứng minh được y chia 6 dư 1, tức $y = 6k + 1$ với k tự nhiên. Khi đó, từ phương trình đã cho, ta có

$$3^x = 2^{6k+1} - 29 \equiv 2 - 29 \equiv 1 \pmod 7.$$

Từ đây, ta chứng minh được x chia hết cho 6, tức $x = 6\ell$ với ℓ nguyên dương. Lúc này, từ phương trình đã cho, ta có

$$2^y = 29 + 3^{6\ell} \equiv 2 \pmod 4.$$

Suy ra $y = 1$. Thử lại, ta thấy không thỏa mãn. Vậy có duy nhất một cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn yêu cầu là $(1, 5)$.

Cách 2. Rõ ràng $y \geq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3^x - 3 = 2^y - 32,$$

hay

$$3(3^{x-1} - 1) = 32(2^{y-5} - 1). \tag{1}$$

Từ (1), ta suy ra $3^{x-1} \equiv 1 \pmod{32}$. Từ đó, ta dễ dàng chứng minh được $x - 1$ chia hết cho 8, tức $x - 1 = 8a$ với a tự nhiên. Lúc này $3^{x-1} - 1 = 3^{8a} - 1$ chia hết cho $3^8 - 1$ là một bội của 5 và 41 nên từ (1), ta suy ra $2^{y-5} \equiv 1 \pmod 5$ và $2^{y-5} \equiv 1 \pmod{41}$. Từ $2^{y-5} \equiv 1 \pmod 5$, ta chứng minh được $y - 5$ chia hết cho 4, tức $y - 5 = 4b$ với b tự nhiên. Từ $2^{y-5} \equiv 1 \pmod{41}$, ta được $2^{4b} \equiv 1 \pmod{41}$ và do đó, ta dễ dàng chứng minh được b chia hết cho 5, tức $b = 5c$ với c tư nhiên. Từ đây, ta có $2^{y-5} - 1 = 2^{20c} - 1$ chia hết cho $2^{20} - 1$ là một bội của 31. Kết hợp với (1), ta suy ra $3^{x-1} \equiv 1 \pmod{31}$. Từ đó, ta dễ dàng chứng minh được $x - 1$ chia hết cho 15, suy ra a chia hết cho 15, tức $a = 15d$ với d tự nhiên. Phương trình (1) có thể được viết lại thành

$$3(3^{120d} - 1) = 32(2^{20c} - 1). \tag{2}$$

Vì $3^{120d} - 1$ chia hết cho $3^6 - 1$ là một bội của 7 nên từ (2), ta suy ra $2^{20c} \equiv 1 \pmod 7$, tức $2^{2c} \equiv 1 \pmod 7$. Từ đây, ta chứng minh được c chia hết cho 3. Suy ra $2^{20c} - 1$ chia hết cho $2^6 - 1$ là một bội của 9. Kết hợp với (2), ta suy ra $3^{120d} - 1$ chia hết cho 3, tức $d = 0$. Suy ra $x = 1$ và $y = 5$. Vậy có duy nhất một cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1, 5)$.

b) Cách 1. Giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành

$$(a + 1)(b + 1) + (b + 1)(c + 1) + (c + 1)(a + 1) = 12.$$

Đặt $x = a + 1$, $y = b + 1$ và $z = c + 1$ thì ta có $xy + yz + zx = 12$. Với phép đặt này thì

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{a^2 + 10a + 21} &= \frac{a+1}{(a+1)^2 + 8(a+1) + 12} = \frac{x}{x^2 + 8x + 12} \\ &= \frac{x}{x^2 + 8x + xy + yz + zx} = \frac{x}{(x+y)(x+z) + 8x}.\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{(x+y)(x+z)+8x} \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{8x}\right]$ nên

$$\frac{a+1}{a^2+10a+21} \le \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{8}\right].$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{b+1}{b^2+10b+21} \le \frac{1}{4}\left[\frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{8}\right]$$

và

$$\frac{c+1}{c^2+10c+21} \le \frac{1}{4}\left[\frac{z}{(z+x)(z+y)} + \frac{1}{8}\right].$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &\le \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} + \frac{3}{8}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} + \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{24}{(x+y)(y+z)(z+x)} + \frac{3}{8}\right]. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta có chú ý rằng

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \ge 0,$$

do đó $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)} = 6$. Ngoài ra, ta cũng có

$$12 = xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

nên $xyz \le 8$. Từ các kết quả trên, ta suy ra

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \ge 6 \cdot 12 - 8 = 64.$$

Và như thế, ta có

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{24}{64} + \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{16}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy max $P = \frac{3}{16}$.

Cách 2. Biến đổi tương tự như **cách 1**, nhưng lúc này ta đặt $x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{b+1}{2}$ và $z = \frac{c+1}{2}$. Khi đó, ta có $xy+yz+zx = 3$ và

$$\frac{a+1}{a^2+10a+21} = \frac{x}{2x^2+8x+6} = \frac{x}{2(x^2+1)+8x+4} \le \frac{x}{4x+8x+4} = \frac{x}{4(3x+1)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b+1}{b^2+10b+21} \le \frac{y}{4(3y+1)}, \quad \frac{c+1}{c^2+10c+21} \le \frac{z}{4(3z+1)}.$$

Do đó

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3x+1} + \frac{y}{3y+1} + \frac{z}{3z+1}\right). \tag{1}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{x}{3x+1} + \frac{y}{3y+1} + \frac{z}{3z+1} \le \frac{3}{4}. \tag{2}$$

Bằng biến đổi trực tiếp, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$5(x+y+z) + 3(xy+yz+zx) + 3 \ge 27xyz,$$

hay

$$5(x+y+z) + 12 \ge 27xyz.$$

Tương tự như **cách 1**, ta chứng minh được $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)} = 3$ và $3 = xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ (suy ra $xyz \le 1$) nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Bây giờ, từ (1) và (2), ta dễ dàng suy ra $P \le \frac{3}{16}$ với dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Và do đó $\max P = \frac{3}{16}$. □

Bài 3 (3.0 *điểm*). Cho hình thoi $ABCD$ ($\angle BAD < 90^\circ$) có đường tròn nội tiếp (O). Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh CB, CD sao cho MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm P, và tam giác CMN nhọn, không cân. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AD tại các điểm E và F. Gọi K, L theo thứ tự là trực tâm các tam giác BME, DNF.

a) Chứng minh rằng đường thẳng OP đi qua trung điểm I của đoạn thẳng KL.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác CMN. Chứng minh rằng $\frac{OI}{CH} - \frac{EF}{2MN} = -\frac{1}{2}$.

c) Gọi S, T theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng BD với các đường thẳng EK, FL. Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng NS và MT. Đường tròn nội tiếp tam giác CMN tiếp xúc với đường thẳng MN tại điểm G. Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và GH song song với nhau.

Lời giải. a) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $OP \perp MN$. Ngoài ra, theo tính chất của trực tâm, ta cũng có $BK \perp EM$ và $CL \perp FN$. Do đó $OP \parallel BK \parallel CL$.

Vì (O) là đường tròn nội tiếp của hình thoi $ABCD$ nên O là tâm của hình thoi và do đó O là trung điểm của BD. Theo tính chất liên quan đến đường trung bình của hình thang, ta có đường thẳng OP đi qua trung điểm của đoạn thẳng KL.

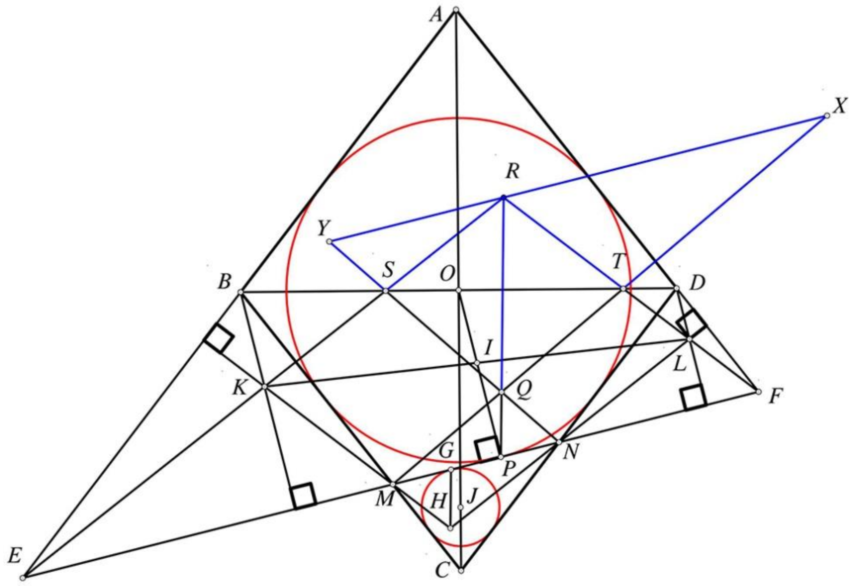
b) Ta có OI là đường trung bình của hình thang $BDLK$ nên

$$OI = \frac{BK + DL}{2}.$$

Chú ý rằng $CH \perp MN$ nên $BK \parallel CH \parallel DL$. Ngoài ra, ta cũng có $BE \parallel CN$ và $DF \parallel CM$. Từ đây, sử dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{OI}{CH} = \frac{BK + DL}{2CH} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BK}{CH} + \frac{DL}{CH} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{MB}{MC} + \frac{ND}{NC} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ME}{MN} + \frac{NF}{MN} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME + NF}{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EF - MN}{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EF}{MN} - \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\frac{OI}{CH} - \frac{EF}{2MN} = -\frac{1}{2}$.



c) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CMN; và gọi R là trực tâm tam giác AEF thì từ $EK \perp BM$ và $BC \parallel AD$, ta suy ra $ES \perp AF$. Do đó đường thẳng EK đi qua điểm R. Tương tự, ta cũng có đường thẳng FT đi qua R.

Chú ý rằng hai tam giác AFE và CMN đồng dạng với nhau, mà (O), R, P là đường tròn nội tiếp, trực tâm và tiếp điểm của (O) với cạnh EF của tam giác AFE, còn (J), H, G là đường tròn nội tiếp, trực tâm và tiếp điểm của (J) với cạnh MN của tam giác CMN nên dễ dàng suy ra được hai tam giác RPE và HGN đồng dạng với nhau. Từ đó $\angle RPE = \angle HGN$. Suy ra $RP \parallel HG$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh điểm Q nằm trên đường thẳng RP. Thật vậy, từ (J), (O) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp và bằng tiếp đối diện đỉnh C của tam giác CMN, ta suy ra $MG = \frac{MC+MN-CN}{2} = NP$ và $MP = NG$. Kết hợp với sự đồng dạng của hai tam giác AFE

và CMN, ta có $\frac{PN}{PM} = \frac{GM}{GN} = \frac{PF}{PE}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được

$$\frac{PN}{PM} = \frac{PF}{PE} = \frac{PF - PN}{PE - PM} = \frac{NF}{EM}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $\angle DFT = \angle BES$ và $\angle TDF = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle ABD = \angle SBE$ nên hai tam giác DTF và BFE đồng dạng với nhau. Suy ra

$$\frac{DT}{BS} = \frac{FD}{BE} = \frac{TF}{SE}. \quad (2)$$

Qua điểm R, kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF cắt các đường thẳng MT, NS thứ tự tại các điểm X, Y. Dễ thấy $\angle RTS = \angle DTF = \angle BSE = \angle RST$ nên tam giác STR cân tại đỉnh R. Suy ra $RT = RS$. Từ đó, áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{RX}{MF} = \frac{TR}{TF}$ và $\frac{RY}{NE} = \frac{SR}{SE}$. Suy ra $\frac{RX}{RY} \cdot \frac{NE}{MF} = \frac{TR}{SR} \cdot \frac{SE}{TF} = \frac{SE}{TF} = \frac{BE}{DF}$ (do (2)). Từ đây, ta được

$$\frac{RY}{RX} = \frac{NE}{MF} \cdot \frac{DF}{BE}. \quad (3)$$

Lại áp dụng định lý Thales với chú ý $AB = AD$, ta có

$$\frac{NF}{ME} = \frac{NF}{NE} \cdot \frac{MF}{ME} \cdot \frac{NE}{MF} = \frac{DF}{DA} \cdot \frac{BA}{BE} \cdot \frac{NE}{MF} = \frac{DF}{BE} \cdot \frac{NE}{MF}. \quad (4)$$

Từ (1), (3) và (4), ta suy ra $\frac{PN}{PM} = \frac{RY}{RX}$. Do đó, theo bổ đề hình thang, ta có ba đường thẳng MX, NY và PR đồng quy, hay điểm Q thuộc đường thẳng RP. Vậy $HG \parallel PQ$. □

Bài 4 (1.0 *điểm*). Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ thỏa mãn $\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2} = 0$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k với $1 \le k \le 2021$ sao cho

$$\left| \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{ka_k}{1+a_k^2} \right| \le \frac{2k+1}{8}.$$

Lời giải. Với mỗi $1 \le i \le 2021$, đặt $x_i = \frac{a_i}{1+a_i^2}$. Khi đó, ta có $-\frac{1}{2} \le x_i \le \frac{1}{2}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2021$ và $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2021} = 0$ (theo giả thiết). Ta cần chứng minh tồn tại số nguyên k với $1 \le k \le 2021$ sao cho

$$|x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k| \le \frac{2k+1}{8}.$$

Giả sử ngược lại, không tồn tại số k nói trên. Khi đó, với mọi $1 \le i \le 2021$, ta có

$$|x_1 + 2x_2 + \cdots + ix_i| > \frac{2i+1}{8}. \quad (1)$$

Đặt $y_i = x_1 + 2x_2 + \cdots + ix_i$ với $1 \le i \le 2021$. Không mất tính tổng quát, giả sử $y_{2021} > 0$ (nếu $y_{2021} < 0$, ta có thể thay $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ bởi $-a_1, -a_2, \ldots, -a_{2021}$, bài toán vẫn không đổi). Khi đó, từ (1), ta có $y_{2021} > \frac{2 \cdot 2021+1}{8}$. Nếu $y_{2020} < 0$, thì ta có

$$|2021x_{2021}| = |y_{2021} - y_{2020}| = y_{2021} + |y_{2020}| > \frac{2 \cdot 2021 + 1}{8} + \frac{2 \cdot 2020 + 1}{8} = \frac{2021}{2}.$$

Suy ra $|x_{2021}| > \frac{1}{2}$, mâu thuẫn. Do đó $y_{2020} > 0$. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được $y_{2019} > 0$, $y_{2018} > 0, \ldots, y_1 > 0$. Bây giờ, ta có chú ý rằng

$$0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2021} = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{y_3 - y_2}{3} + \cdots + \frac{y_{2021} - y_{2020}}{2021}$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2}y_1 + \frac{1}{2 \cdot 3}y_2 + \cdots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}y_{2020} + \frac{1}{2021}y_{2021} > 0.$$

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ rằng phải tồn tại số nguyên k thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta có điều phải chứng minh. □

Website HOC247 cung cấp một môi trường học trực tuyến sinh động, nhiều tiện ích thông minh, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bi – Tiết kiệm 90%

-Luyên thi ĐH, THPT QG: Đội ngũ GV Giỏi, Kinh nghiệm từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa luyện thi THPTQG các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.

-Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán: Ôn thi HSG lớp 9 và luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán các trường PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An và các trường Chuyên khác cùng TS.Trần Nam Dũng, TS. Pham Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

-Toán Nâng Cao THCS: Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.

-Bồi dưỡng HSG Toán: Bồi dưỡng 5 phân môn Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Pham Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn cùng đôi HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí

-HOC247 NET: Website hoc miễn phí các bài học theo chương trình SGK từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm mễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.

-HOC247 TV: Kênh Youtube cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.