



LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 1 ẨN

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \quad f(x) \leq g(x) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x .

Ta gọi $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $f(x_0) \leq g(x_0)$ là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau: $g(x) > f(x)$ $g(x) \geq f(x)$.

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình (1).

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

Ta đã biết hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương đó.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\begin{aligned} P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) < Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) > 0, \forall x \\ P(x) < Q(x) &\Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) > Q(x) \cdot f(x), \quad f(x) < 0, \forall x \end{aligned}$$

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x), \quad P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$$

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến hệ bất phương trình.

3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp

a) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.

b) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$$

rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

IV – BÀI TẬP

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3-2x} + \sqrt{5-6x}$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right]$. B. $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-6}$ là

- A. $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. B. $\left[\frac{6}{5}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $\left[\frac{3}{4}; \frac{6}{5}\right]$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+4}$ là

- A. $[1; +\infty)$. B. $[1; +\infty) \setminus \{4\}$. C. $(1; +\infty) \setminus \{4\}$. D. $(-4; +\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4-3x}$ là

- A. $\left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right]$. B. $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right]$. C. $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$. D. $\emptyset$.

Câu 5. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{1-2x}$.

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \in -\infty; 2$. C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 6. Cho bất phương trình: $\frac{8}{3-x} > 1$ (1). Một học sinh giải như sau:

$$(1) \stackrel{(I)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3-x} > \frac{1}{8} \stackrel{(II)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \neq 3 \\ 3-x < 8 \end{cases} \stackrel{(III)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \neq 3 \\ x > 5 \end{cases}.$$

Hỏi học sinh này giải sai ở bước nào?

- A. (I). B. (II). C. (III). D. (II) và (III).

Câu 7. Cặp bất phương trình nào sau đây không tương đương

- A. $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$. B. $2x-1 + \frac{1}{x-3} < \frac{1}{x-3}$ và $2x-1 < 0$.
C. $x^2(x+2) < 0$ và $x+2 < 0$. D. $x^2(x+2) > 0$ và $(x+2) > 0$.

Câu 8. Cặp bất phương trình nào sau đây không tương đương:

- A. $5x-1 + \frac{1}{x-2} < \frac{1}{x-2}$ và $5x-1 < 0$. B. $5x-1 + \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-2}$ và $5x-1 > 0$.
C. $x^2(x+3) < 0$ và $x+3 < 0$. D. $x^2(x+5) \geq 0$ và $x+5 \geq 0$.

THÔNG HIỂU

Câu 9. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x + \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 2 - \sqrt{4-x}$.



- A. $x \in -5; 4$. B. $x \in -5; 4$. C. $x \in 4; +\infty$. D. $x \in -\infty; -5$.

Câu 10. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < x+1$.

- A. $x \in -1; +\infty$. B. $x \in -1; +\infty$. C. $x \in -1; +\infty \setminus 2$. D. $x \in -1; +\infty \setminus 2$.

Câu 11. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+5 > 0$?

- A. $(x-1)^2(x+5) > 0$ B. $x^2(x+5) > 0$
C. $\sqrt{x+5}(x+5) > 0$ D. $\sqrt{x+5}(x-5) > 0$

Câu 12. Bất phương trình: $2x + \frac{3}{2x-4} < 3 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với:

- A. $2x < 3$ B. $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$ C. $x < \frac{3}{2}$ D. Tất cả đều đúng

Câu 13. Bất phương trình: $(x+1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0$ tương đương với bất phương trình:

- A. $(x+1)\sqrt{x}\sqrt{x+2} \geq 0$ B. $\sqrt{(x+1)^2 x(x+2)} \geq 0$
C. $\frac{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}{(x+3)^2} \geq 0$ D. $\frac{(x-1)\sqrt{x(x+2)}}{(x-2)^2} \geq 0$

Câu 14. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq 3$ B. $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \leq 1$
C. $\frac{x-1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$ D. $x + |x| \geq x \Leftrightarrow |x| \geq 0$

Câu 15. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 5 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với:

- A. $2x < 5$. B. $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{5}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Câu 16. Bất phương trình $2x-1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $2x-1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$. B. $2x-1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.
C. $2x-1 \sqrt{x-2018} \geq \sqrt{x-2018}$. D. $\frac{2x-1}{\sqrt{x-2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$.

Câu 17. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

- A. $x-2 \leq 0$ và $x^2 x-2 \leq 0$. B. $x-2 < 0$ và $x^2 x-2 > 0$.
C. $x-2 < 0$ và $x^2 x-2 < 0$. D. $x-2 \geq 0$ và $x^2 x-2 \geq 0$.

Câu 18. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+5 > 0$?

- A. $x-1^2 x+5 > 0$. B. $x^2 x+5 > 0$.



C. $\sqrt{x+5} x+5 > 0$.

D. $\sqrt{x+5} x-5 > 0$.

Câu 19. Bất phương trình $x+1 \sqrt{x} \leq 0$ tương đương với

A. $\sqrt{x x+1}^2 \leq 0$. B. $x+1 \sqrt{x} < 0$. C. $x+1^2 \sqrt{x} \leq 0$. D. $x+1^2 \sqrt{x} < 0$.

Câu 20. Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x$ tương đương với

A. $1-2x \sqrt{x-1} \geq x 1-2x$. B. $2x+1 \sqrt{x-1} \geq x 2x+1$.

C. $1-x^2 \sqrt{x-1} \geq x 1-x^2$. D. $x\sqrt{x-1} \leq x^2$.

VẬN DỤNG

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m = 3$. B. $m < 3$. C. $m > 3$. D. $m < \frac{1}{3}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{m-2x} - \sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m < -2$. B. $m > 2$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -2$.

Câu 23. Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $a+1 x-a+2 > 0$ và $a-1 x-a+3 > 0$ tương đương:

A. $a = 1$. B. $a = 5$. C. $a = -1$. D. $a = 2$.

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $m+2 x \leq m+1$ và $3m x-1 \leq -x-1$ tương đương:

A. $m = -3$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

Câu 25. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $m+3 x \geq 3m-6$ và $2m-1 x \leq m+2$ tương đương:

A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 4$. D. $m = 0$ hoặc $m = 4$.

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	D	D	B	D	B	B	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	C	D	D	B	A	C	C	B
21	22	23	24	25					
B	D	B	D	B					



Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

*HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí*

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.