

Giải SBT Toán 11 bài 1: Phương pháp quy nạp toán học

Bài 1.1 trang 99 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2+5+8+\dots+(3n-1)=n(3n+1)/2$

b) $3+9+27+\dots+3^n=1/2(3^{n+1}-3)$

Giải:

a) Đặt vế trái bằng S_n . Kiểm tra với $n = 1$ hệ thức đúng.

Giả sử đã có $S_k=k(3k+1)/2$ với $k \geq 1$.

Ta phải chứng minh $S_{k+1}=(k+1)(3k+4)/2$

Thật vậy

$$S_{k+1}=S_k+3(k+1)-1$$

$$=k(3k+1)/2+3k+2$$

$$=3k^2+k+6k+4/2$$

$$=3k^2+7k+4/2$$

$$=(k+1)(3k+4)/2(\text{đpcm})$$

b) Đặt vế trái bằng làm tương tự như câu a).

Bài 1.2 trang 99 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=n(4n^2-1)/3$

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=n^2(n+1)^2/4$

Giải:

a) Đặt vế trái bằng S_n

Với $n = 1$ vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng $1(4 \cdot 1 - 1)/3 = 1$

Giả sử đã có $S_k=k(4k^2-1)/3$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh



$$S_{k+1}=(k+1)[4(k+1)^2-1]/3$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1}=S_k+[2(k+1)-1]^2=S_k+(2k+1)^2$$

$$=k(4k^2-1)/3+(2k+1)^2$$

$$=(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]/3$$

$$=(k+1)(2k^2+5k+3)/3$$

$$=(k+1)(2k+3)(2k+1)/3$$

$$=(k+1)[4(k+1)^2-1]/3$$

b) Đặt vế trái bằng A_n

Dễ thấy với $n = 1$ hệ thức đúng.

Giả sử đã có $A_k=k^2(k+1)^2/4, (k \geq 1)$

Ta có:

$$A_{k+1}=A_k+(k+1)^3$$

$$=k^2(k+1)^2/4+(k+1)^3$$

$$=(k+1)^2(k^2+4k+4)/4$$

$$=(k+1)^2(k+2)^2/4$$

Bài 1.3 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

a) $2n^3-3n^2+n$ chia hết cho 6.

b) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Giải:

a) HD: Đặt $B_n=2n^3-3n^2+n$ tính B_1

Giả sử đã có $B_k=2k^3-3k^2+k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh $B_{k+1}=2(k+1)^3-3(k+1)^2+k$ chia hết cho 6.

b) Đặt $A_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ Dễ thấy $A_1 = 133$ chia hết cho 133.

Giả sử $A_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ đã có chia hết cho 133.

Ta có

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 11^{k+2} + 12^{2k+1} \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k-1} \cdot 12^2 \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k-1} (11 + 133) \\ &= 11 \cdot A_k + 133 \cdot 12^{2k-1} \end{aligned}$$

Vì A_k : 133 A_k : 133 nên A_{k+1} : 133

Bài 1.4 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Chứng minh các bất đẳng thức sau ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2^{n+2} > 2n+5$;

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$

Giải:

a) Với $n = 1$ thì $2^{1+2} = 8 > 7 = 2 \cdot 1 + 5$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$ tức là $2^{k+2} > 2k+5$ (1)

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+3} > 2(k+1) + 5$ hay $2^{k+3} > 2k+7$ (2)

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+3} > 4k+10 = 2k+7 + 2k+3$$

Vì $2k+3 > 0$ nên $2^{k+3} > 2k+7$ (đpcm)

b) Với $n = 1$ thì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ bất đẳng thức đúng.

Giả sử đã có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$ với $k \geq 1$, ta phải chứng minh

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$$

Thật vậy, ta có:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$$



$$= \sin^{2k} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^{2k} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \leq \sin^{2k} \alpha + \cos^{2k} \alpha \leq 1$$

Bài 1.5 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Với giá trị nào của số tự nhiên n ta có

a) $2^n > 2n+1$

b) $2^n > n^2 + 4n + 5$

c) $3^n > 2^n + 7n$?

Giải:

Đây thực chất là bài toán giải bất phương trình trên $\mathbb{N}^*$.

Phương pháp: Có thể dùng phép thử, sau đó dự đoán kết quả và chứng minh.

a) Dùng phép thử với $n = 1, 2, 3, 4$ ta dự đoán: Với $n \geq 3$ bất đẳng thức đúng. Ta sẽ chứng minh điều đó bằng quy nạp.

Với $n = 3$ hiển nhiên đã có kết quả đúng, vì $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ tức là $2^k > 2k+1$ (1)

ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2k+3 \quad (2)$$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+1} > 4k+2 = 2k+3 + 2k-1 > 2k+3$$

b) HD: Dùng phép thử.

Với n từ 1 đến 6, bất đẳng thức đều không đúng. Tuy nhiên không thể vội vàng kết luận bất phương trình vô nghiệm.

Nếu thử tiếp ta thấy rằng bất phương trình đúng khi $n = 7$. Ta có thể làm tiếp để đi tới dự đoán: Với n bất phương trình được nghiệm đúng. Sau đó chứng minh tương tự như câu a).

c) Làm tương tự như câu a) và câu b).

Bài 1.6 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Cho tổng



$$S_n = 1/1.5 + 1/5.9 + 1/9.13 + \dots + 1/(4n-3)(4n+1)$$

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải:

a) Tính

$$S_1 = 1/5, S_2 = 2/9, S_3 = 3/13, S_4 = 4/17$$

b) Viết lại

$$S_1 = 1/5 = 1/4.1 + 1, S_2 = 2/9 = 2/4.2 + 1$$

$$S_3 = 3/13 = 3/4.3 + 1, S_4 = 4/17 = 4/4.4 + 1$$

Ta có thể dự đoán $S_n = n/4n+1$

Bài 1.7 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện

$$-1 < a_i \leq 0 \text{ với } i=1, n$$

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_n$$

Giải:

Với $n = 1$ bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$ tức là

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_k \quad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với $1+a_{k+1}$ ta được

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq (1+a_1+a_2+\dots+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$= 1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\dots+a_ka_{k+1}$$

Vì $a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\dots+a_ka_{k+1} > 0$ nên

$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq 1+a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}$, nghĩa là bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.



Bài 1.8 trang 100 Sách bài tập (SBT) Đại số và giải tích 11

Chứng minh rằng với các số thực $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Giải:

Với $n = 1$ thì $|a_1| = |a_1|$

Với $n = 2$ thì $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$. Đây là bất đẳng thức khá quen thuộc và dấu bằng xảy ra khi a_1, a_2 cùng dấu.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$. Đặt $a_1 + a_2 + \dots + a_k = A$ ta có

$$|A| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \quad (1)$$

$$\text{Mà } |A + a_{k+1}| \leq |A| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

Nên $|a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|$, tức là bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$

Xem thêm các bài tiếp theo tại: <https://vndoc.com/giai-bai-tap-lop-11>