

Tài liệu do VnDoc.com biên soạn và đăng tải, nghiêm cấm các hành vi sao chép với mục đích thương mại.

Phương pháp biến đổi tương đương

I. Phương pháp

Dạng 1: Bất phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \leq f(x) < g^2(x) \end{cases}$

Dạng 2: Bất phương trình: $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

Chú ý: Khi giải bất phương trình ta sẽ làm theo các bước cơ bản sau:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định (nếu có)
- Bước 2: Sử dụng phép biến đổi tương đương chuyển bất phương trình về hệ bất phương trình đại số, từ đó xác định nghiệm x
- Bước 3: kiểm tra nghiệm cùng điều kiện ở bước 1
- Kết luận

II. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-1}{5} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{BPT tương đương: } \sqrt{5x+1} \leq 3\sqrt{x} + \sqrt{4x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5x+1 \leq 9x+4x-1+6\sqrt{x(4x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x(4x-1)} \geq 1-4x \text{ luôn đúng với điều kiện đề bài}$$

$$\text{Vậy bất phương trình có tập nghiệm } x \geq \frac{1}{4}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ x \neq 0 \end{cases}$

Cách 1: Sử dụng nhân liên hợp:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{1-4x^2})(1+\sqrt{1-4x^2})}{x(1+\sqrt{1-4x^2})} < 3 \Leftrightarrow 4x < 3(1+\sqrt{1-4x^2})$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2} > 4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 < 0 \\ 1-4x^2 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 9(1-4x^2) > (4x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ x \geq \frac{3}{4} \\ 0 < x < \frac{6}{13} \end{cases} \text{ kết hợp điều kiện } \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Cách 2: Xét các trường hợp điều kiện:

TH1: Với $\frac{-1}{2} \leq x < 0$

Ta có: $\text{BPT} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} < 1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 0 \\ 1-4x^2 < (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq x < 0$

TH2: Với $0 < x \leq \frac{1}{2}$

$\text{BPT} \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} < 1-3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1-3x < 0 \\ 1-4x^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 1-4x^2 > (1-3x)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{2(x^2-1)} \leq x+1$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2(x^2-1) < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (3, -1) \end{cases} \text{ kết hợp với điều kiện đề bài} \Rightarrow x \in [1, 3)$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in [1, 3)$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

- $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} > 3$
- $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq x - 2$
- $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} < \sqrt{x-3}$
- $\sqrt{x^2 - 1} < x - 5$
- $\sqrt{2x+4} > \sqrt{x-3} + \sqrt{x+6}$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

- $\frac{2x}{\sqrt{x+1}} \geq 3x - 2$
- $\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < 2x + 3$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

- $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq \sqrt{x^2 + 4x - 5}$
- $\sqrt{2x^2 - 3x + 6} \geq x + 5$
- $\sqrt{x + \sqrt{2x+1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x+1}} > \frac{3}{2}$

Bài 4: Giải biện luận bất phương trình sau:

- $(m+1)\sqrt{2x+1} < 1$
- $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > m$
- $\sqrt{x-m} < x+3$