

CHUYÊN ĐỀ

BÀI 6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Phát biểu được định nghĩa đường phân giác của tam giác, tính chất đường phân giác trong tam giác cân.
- + Phát biểu được định lý về ba đường phân giác của tam giác.

❖ Kỹ năng

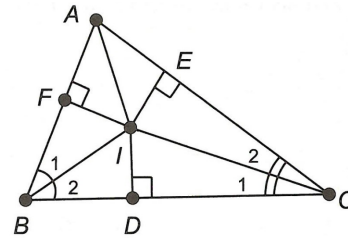
- + Vận dụng được các định nghĩa, định lý để chứng minh các tính chất hình học.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định lý

- Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm.
- Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Ví dụ:

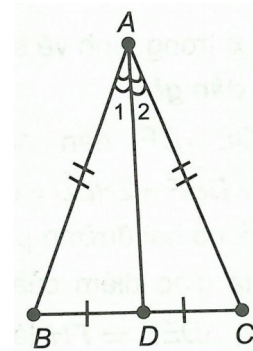


$\triangle ABC$ có 3 đường phân giác cùng qua điểm I và $ID = IE = IF$.

Tính chất đường phân giác xuất phát từ đỉnh của tam giác cân

- Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đối diện với đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác đó.

Ví dụ:



$\triangle ABC$ cân tại A và AD là phân giác của góc A thì $BD = DC$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

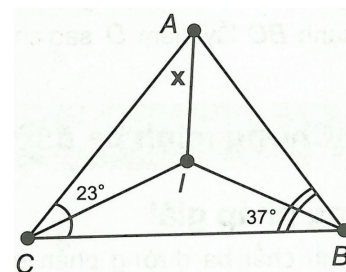
Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau. Từ đó tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất

- Giao điểm của hai đường phân giác của một tam giác nằm trên đường phân giác thứ ba của tam giác đó.
- Giao điểm các đường phân giác của tam giác cách đều ba cạnh của tam giác

Ví dụ: Tìm x trong hình vẽ sau



Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} + \widehat{ACB} &= 2\widehat{IBC} + 2\widehat{ICB} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) \\ &= 2(37^\circ + 23^\circ) = 120^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.\end{aligned}$$

Mà BI, CI lần lượt là đường phân giác của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong của $\triangle ABC \Rightarrow AI$ là đường phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 30^\circ$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Tìm x trong hình vẽ sau

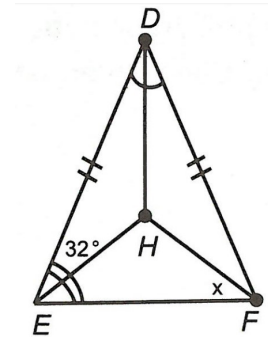
Hướng dẫn giải

Ta có $DE = DF$ nên $\triangle DEF$ cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{DEF} = 2\widehat{HED} = 64^\circ.$$

Vì $\triangle DEF$ có hai đường phân giác DH, EH nên H là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle DEF \Rightarrow FH$ là đường phân giác

$$\text{của } \widehat{DEF} \Rightarrow x = \frac{\widehat{F}}{2} = 32^\circ.$$



Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho $\widehat{xOy}$, đường phân giác Oz . Trên đường Ox lấy điểm A sao cho $OA = 3\text{cm}$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với Ox cắt Oz tại H , cắt Oy tại K . Lấy điểm B trên đường Ox sao cho KA là đường phân giác của góc $\widehat{OKB}$. Hạ $HI \perp OK$ ($I \in OK$).

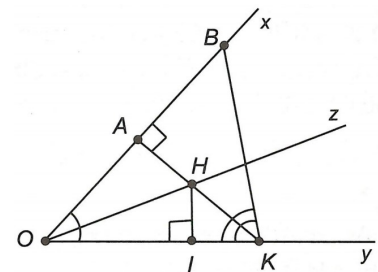
- Chứng minh $AH = HI$.
- Biết $OH = 5\text{cm}$, tính khoảng cách từ điểm H đến BK .

Đáp án

- Vì H nằm trên đường phân giác của $\widehat{xOy}$ nên H cách đều Ox, Oy nên $AH = HI$.
- $\triangle AOH$ vuông tại A , áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\text{ (cm)}$.

Ta có H là giao điểm của ba đường phân giác trong của $\triangle OBK$ nên H cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Vậy khoảng cách từ điểm H đến BK bằng $AH = 4\text{cm}$.



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có CF là đường phân giác của góc $\widehat{C}$ ($F \in AB$). Qua F kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC ở E .

- Chứng minh $\triangle FEC$ là tam giác cân.
- Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CD = FE$. Chứng minh $FE = FD$.

Đáp án

a) $FE \parallel BC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{FCD}$ (hai góc so le trong).

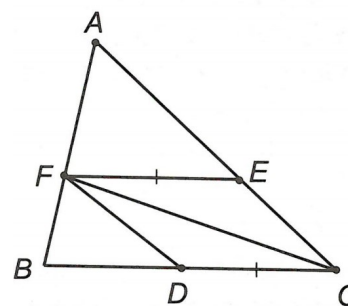
Mà $\widehat{FCE} = \widehat{FCD}$ (CF là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$) nên
 $\widehat{EFC} = \widehat{ECF} \Rightarrow \triangle FEC$ cân tại E .

b) Xét $\triangle FEC$ và $\triangle CDF$ có

$FE = CD$ (giả thiết); $\widehat{EFC} = \widehat{FCD}$; FC chung.

Do đó $\triangle FEC = \triangle CDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow FE = FD$ (hai cạnh tương ứng).



Dạng 2: Chứng minh ba đường đồng quy, ba điểm thẳng hàng

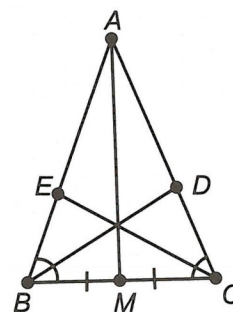
Phương pháp giải

Vận dụng tính chất ba đường phân giác của tam giác: “Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó”.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ các đường phân giác BD , CE . Lấy M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng

- AM là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$;
- Ba đường thẳng AM , BD , CE đồng quy.

Hướng dẫn giải



- Xét tam giác $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có
 $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A);
 $BM = CM$ (do M là trung điểm BC);
Cạnh AM chung.

Do đó $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng).

Vậy AM là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

- Xét $\triangle ABC$ có AM , BD , CE là các đường phân giác nên cùng đi qua một điểm hay ba đường thẳng AM , BD , CE đồng quy.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC , đường phân giác AD . Các đường phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E . Chứng minh rằng ba điểm A , D , E thẳng hàng.

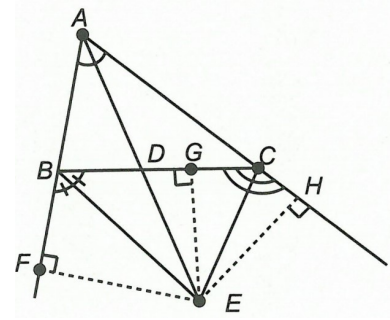
Hướng dẫn giải

Gọi F, H, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E xuống các đường thẳng AB, AC và BC .

Các đường phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E nên $EF = EG$ và $EH = EG \Rightarrow EF = EH \Rightarrow E$ thuộc đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lại có AD là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.



Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác DEF có $DE = DF$, hạ $DK \perp EF$ ($K \in EF$). Gọi EM, FN lần lượt là đường phân giác trong các góc $\widehat{E}$ và $\widehat{F}$ của tam giác DEF . Chứng minh rằng:

a) DK là đường phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

b) DK, EM, FN đồng quy.

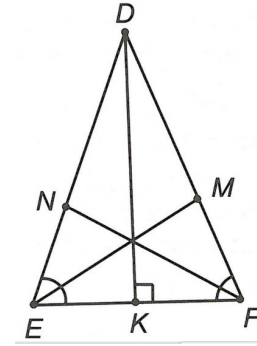
Đáp án

a) Do $DE = DF$ (giả thiết) nên $\triangle DEF$ cân tại D .

Suy ra DK là đường cao đồng thời là đường phân giác của $\widehat{EDF}$.

b) Xét $\triangle DEF$ có DK, EM, FN là các đường phân giác.

Suy ra ba đường thẳng DK, EM, FN đồng quy.



Câu 2: Cho tam giác ABC . Các đường phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và C cắt nhau ở K .

a) Chứng minh rằng BK là phân giác của góc $\widehat{ABC}$.

b) Cho các đường phân giác của góc $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ trong $\triangle ABC$ cắt nhau ở I . Chứng minh rằng B, I, K thẳng hàng.

Đáp án

a) Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm K trên các đường thẳng AB, AC và BC .

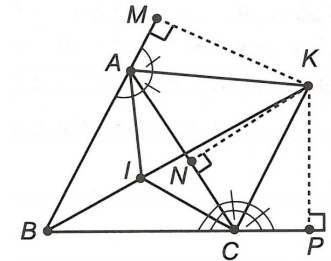
Vì các đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh A và C cắt nhau tại K nên $KM = KN$ và $KN = KP$.

$\Rightarrow KM = KP$ nên K thuộc tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$. (1)

b) Vì I là giao điểm các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ trong $\triangle ABC$ nên I là giao của ba đường phân giác của $\triangle ABC$.

Suy ra BI cũng là phân giác của góc $\widehat{ABC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, I, K thẳng hàng.



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ là tam giác đều. Qua B kẻ đường thẳng $d \parallel AC$ và hạ $BM \perp AC$ ($M \in AC$). Qua C kẻ đường thẳng $d' \parallel AB$ và hạ $CN \perp AB$ ($N \in AB$). Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại P . Chứng minh rằng

a) Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ và hai đường BM, CN đồng quy.

b) Chứng minh $BM \perp BP$.

Đáp án

a) $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

Gọi I là giao điểm của BM và CN .

$\triangle BMC$ có $\widehat{BMC} = 90^\circ$; $\widehat{BCM} = 60^\circ$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{BMC} - \widehat{BCM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} \text{ nên } BM \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{ABC}.$$

Chứng minh tương tự, CN là phân giác của $\widehat{ACB}$.

$\triangle ABC$ có BM, CN là hai đường phân giác. Mặt khác, I là giao điểm của BM và CN nên I là giao điểm của ba đường phân giác của $\triangle ABC$.

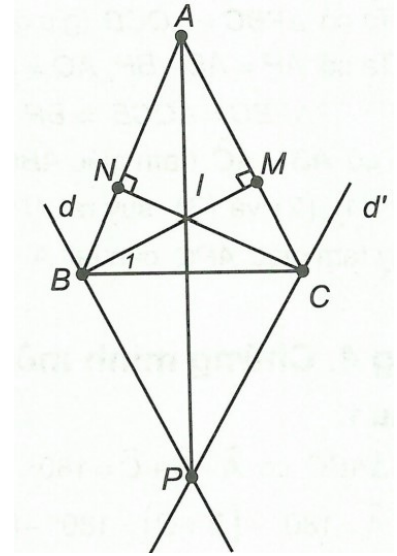
Do đó, I thuộc đường phân giác của $\widehat{A}$.

Vậy đường phân giác của $\widehat{A}$ và hai đường BM, CN đồng quy tại I .

b) Ta có $\widehat{B_1} = 30^\circ$ (chứng minh trên).

Lại có $d \parallel AC \Rightarrow \widehat{PBC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (so le trong).

Suy ra $\widehat{MBP} = \widehat{B_1} + \widehat{CBP} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ hay $BM \perp BP$.



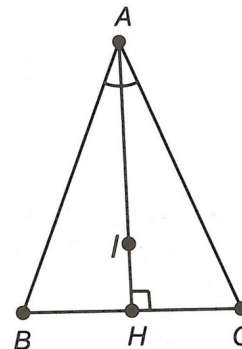
Dạng 3: Đường phân giác của các tam giác đặc biệt

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất trong tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh cũng đồng thời là đường trung tuyến, đường cao.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh rằng AI vuông góc với BC .

Hướng dẫn giải



Hạ $AH \perp BC$ tại H .

Vì I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ nên I là giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác (tính chất 3 đường phân giác trong tam

giác) $\Rightarrow AI$ là phân giác của góc A .

Mặt khác, $\triangle ABC$ cân tại A nên AH là đường cao đồng thời là đường phân giác của góc A (tính chất tam giác cân).

$\Rightarrow AH$ trùng AI .

Hay AI vuông góc với BC .

Ví dụ mẫu

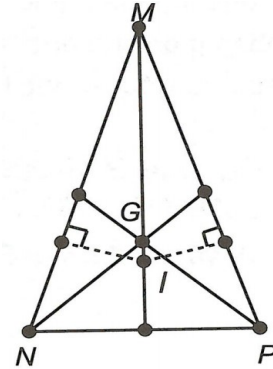
Ví dụ. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm. I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh rằng ba điểm M, G, I thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của $\triangle MNP$ nên MI là đường phân giác của góc $\widehat{NMP}$.

Do $\triangle MNP$ cân tại M nên đường phân giác MI cũng là đường trung tuyến.

G là trọng tâm $\triangle MNP$ nên MI đi qua G hay M, G, I thẳng hàng.



Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân tại A .

Đáp án

Xét $\triangle BHA$ và $\triangle CHA$ có

$\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (AH là đường phân giác của góc $\widehat{A}$),

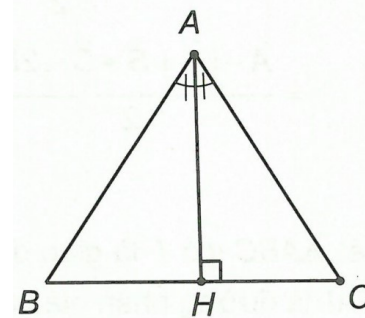
$\widehat{BHA} = \widehat{CHA} = 90^\circ$ (giả thiết),

Cạnh AH chung.

Do đó $\triangle BHA = \triangle CHA$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = AC$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle ABC$ cân tại A .



Câu 2: Cho tam giác ABC cân tại A . CP, BQ là các đường phân giác trong của $\triangle ABC$ ($P \in AB, Q \in AC$).

Gọi O là giao điểm của CP và BQ .

- Chứng minh tam giác OBC là tam giác cân.
- Chứng minh điểm O cách đều ba cạnh AB, AC và BC .
- Chứng minh đường thẳng AO đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và vuông góc với nó.
- Chứng minh $CP = BQ$.
- Tam giác APQ là tam giác gì? Vì sao?

Đáp án

a) $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Vì BQ và CP là đường phân giác của $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{ABC}}{2}$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{ACB}}{2}$.

Do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

Suy ra $\triangle OBC$ cân tại O .

b) Vì O là giao điểm các đường phân giác CP và BQ trong $\triangle ABC$ nên O là giao điểm ba đường phân giác trong $\triangle ABC$. Do đó, O cách đều ba cạnh AB , AC và BC .

c) Ta có $\triangle ABC$ cân tại A , AO là đường phân giác của góc A nên AO đồng thời là trung tuyến và đường cao của $\triangle ABC$.

Vậy đường thẳng AO đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và vuông góc với nó.

d) Ta có $\triangle PBC = \triangle QCB$ (g.c.g) $\Rightarrow CP = BQ$ (hai cạnh tương ứng).

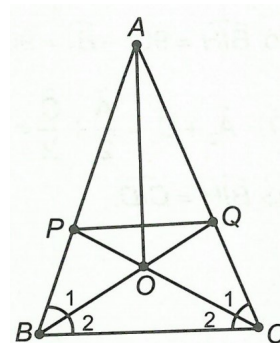
e) Ta có $AP = AB - BP$, $AQ = AC - CQ$; (1)

$\triangle PBC = \triangle QCB \Rightarrow BP = CQ$. (2)

Lại có $AB = AC$ (tam giác ABC cân tại A). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AP = AQ$.

Vậy tam giác APQ cân tại A .



Dạng 4: Chứng minh mối quan hệ trong các góc

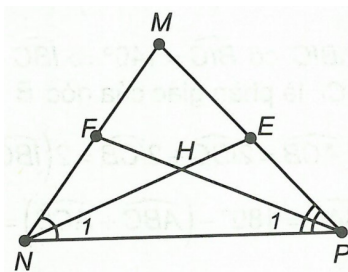
Phương pháp giải

- Vận dụng các tính chất đường phân giác của một góc để tìm mối quan hệ giữa các góc.

- Dùng định lý tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .

Ví dụ: Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 50^\circ$, $\widehat{P} = 60^\circ$. Các đường phân giác NE , PF cắt nhau ở H . Hãy tính số đo góc $\widehat{NHP}$.

Hướng dẫn giải



Các đường phân giác NE , PF cắt nhau ở H nên

$$\widehat{N}_1 = \frac{\widehat{N}}{2} = 25^\circ \text{ và } \widehat{P}_1 = \frac{\widehat{P}}{2} = 30^\circ.$$

Xét tam giác HNP có $\widehat{NHP} + \widehat{N}_1 + \widehat{P}_1 = 180^\circ$.

$$\text{Suy ra } \widehat{NHP} = 180^\circ - (\widehat{N}_1 + \widehat{P}_1)$$

$$= 180^\circ - (25^\circ + 30^\circ) = 125^\circ.$$

Ví dụ mẫu

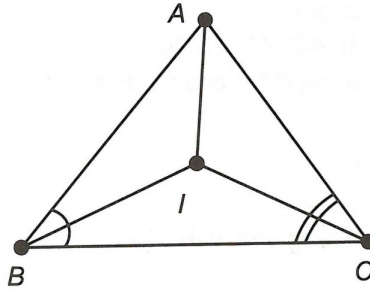
Ví dụ. Cho tam giác ABC . Các đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở I .

a) Nếu $\widehat{A} = 70^\circ$, hãy tính số đo góc $\widehat{BIC}$.

b) Nếu $\widehat{BIC} = 140^\circ$, hãy tính số đo góc $\widehat{A}$.

c) Chứng minh rằng $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ suy ra

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

b) Xét $\triangle BIC$ có $\widehat{BIC} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 40^\circ$.

Do BI, CI là phân giác của góc B và góc C nên

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{IBC} + 2\widehat{ICB} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 80^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và đường phân giác AD .

a) Nếu $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$, hãy tính số đo góc $\widehat{HAD}$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{HAD} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

Đáp án

a) $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ.$$

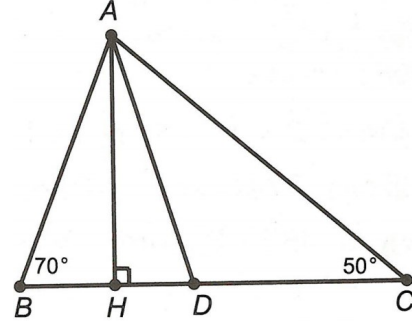
Mà AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 30^\circ.$$

Mặt khác, vì tam giác ABH vuông ở H nên

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{HAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAH} = 10^\circ.$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{HAD} &= \widehat{BAD} - \widehat{BAH} = \frac{\widehat{A}}{2} - (90^\circ - \widehat{B}) = \frac{\widehat{A} - (180^\circ - 2\widehat{B})}{2} \\ &= \frac{\widehat{A} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2\widehat{B})}{2} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tam giác ABC có I là giao điểm các đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$. Gọi D là giao điểm của AI và BC . Kẻ IH vuông góc với BC ($H \in BC$). Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng AD là đường phân giác của $\widehat{A}$.

b) $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

Đáp án

a) Xét $\triangle ABC$ có I là giao điểm của các đường phân giác $\widehat{B}$

và $\widehat{C}$ nên AI là đường phân giác của $\widehat{A}$.

Mà $D \in AI$ nên AD là đường phân giác của $\widehat{A}$.

$$\text{b) Ta có } \widehat{BIH} = 90^\circ - \widehat{B}_2 = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Và } \widehat{CID} = \widehat{A}_2 + \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{CID}.$$

