

CHUYÊN ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.

CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC.

BÀI 1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Trình bày được định lý về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác.
- + Áp dụng được định lý về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác để so sánh độ dài các cạnh, số đo góc của tam giác đó.

❖ Kỹ năng

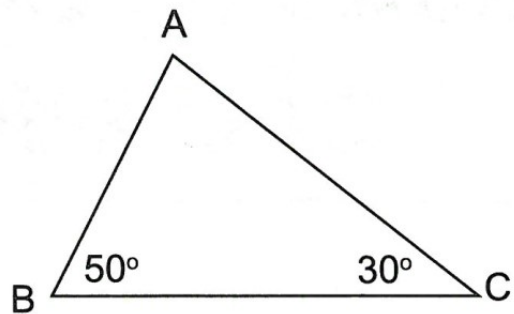
- + Biết vận dụng các định lý để giải quyết bài toán.
- + Vận dụng vẽ hình theo đúng yêu cầu bài toán, nhận biết được các tính chất qua hình vẽ.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

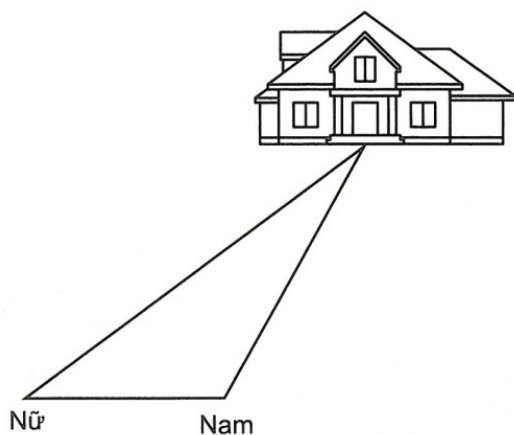
Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác

- Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Ví dụ:



$\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $AB < AC$.



Bạn nữ đi xa hơn bạn nam.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

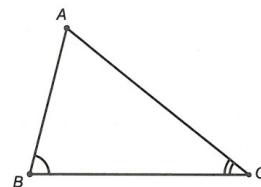
Dạng 1: So sánh hai góc trong một tam giác

Phương pháp giải

- Để so sánh hai góc trong một tam giác, ta so sánh hai cạnh đối diện với hai góc đó.
- Sử dụng định lý: “Trong một tam giác, góc có cạnh đối diện lớn hơn thì lớn hơn”.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $AB = 8cm$, $AC = 10cm$. So sánh $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.

Hướng dẫn giải



Xét $\triangle ABC$ có

$AB = 8cm$, $AC = 10cm$

$\Rightarrow AC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Hãy so sánh góc B và góc C .

Hướng dẫn giải

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

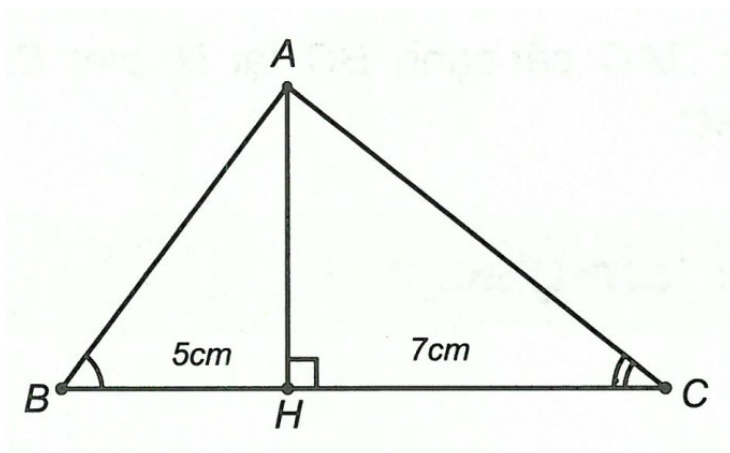
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AC = 4cm \Rightarrow AC > AB.$$

Do đó $\hat{B} > \hat{C}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , đường cao AH , biết $BH = 5cm$, $CH = 7cm$. Hãy so sánh hai góc B và C .

Hướng dẫn giải



Vì $\triangle HAB$ vuông tại H và $\triangle HAC$ vuông tại H nên áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH^2 + AH^2 = 25 + AH^2 \\ AC^2 = CH^2 + AH^2 = 49 + AH^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 > AB^2 \Rightarrow AC > AB.$$

Xét $\triangle ABC$ có $AC > AB$ nên $\hat{B} > \hat{C}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt BC tại D , biết $BD = 2DC$. Chứng minh rằng $\hat{B} < \hat{C}$.

Hướng dẫn giải

Kẻ $DE \perp AB$; $DF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$).

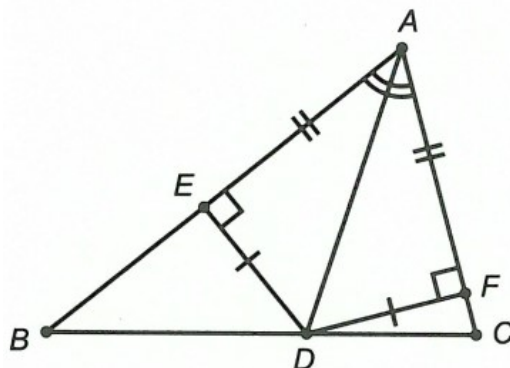
Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ADF$ có $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$, AD chung,

$\widehat{EAD} > \widehat{FAD}$ (do AD là tia phân giác).

Do đó $\triangle ADE = \triangle ADF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ DE = DF \end{cases} \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

Xét $\triangle EBD$ có $\hat{E} = 90^\circ$, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có



$$BE^2 = BD^2 - ED^2 = (2DC)^2 - DF^2 = 4DC^2 - DF^2. \quad (1)$$

Xét $\triangle FDC$ có $\widehat{F} = 90^\circ$, áp dụng định lí Pi-ta-go ta có

$$DC^2 = DF^2 + CF^2 \Rightarrow CF^2 = DC^2 - DF^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE > CF$.

Mặt khác $\begin{cases} AB = BE + AE \\ AC = AF + FC \end{cases}$ và $AE = AF$ nên $AB > AC$.

Do đó $\widehat{B} < \widehat{C}$ (điều phải chứng minh).

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AB = 23cm$, $AC = 25cm$ và $BC = 30cm$. So sánh các góc của tam giác ABC .

Câu 2: Cho tam giác ABC cân ở A có chu vi bằng $20cm$, cạnh đáy $BC = 6cm$. So sánh các góc của tam giác ABC .

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D . Chứng minh rằng $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC , biết $AB = 6cm$, $BC = 7cm$ và diện tích tam giác là $21cm^2$. Hãy so sánh các góc của tam giác.

Câu 5: Cho tam giác ABC , có $AH \perp BC$ ($H \in BC$) và $AB = HC$. Hãy so sánh độ lớn của góc B và góc C trong tam giác ABC .

Câu 6: Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC , $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$. Hãy so sánh góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC , tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D , biết $BD = 3cm$, $DC = 5cm$. Hãy so sánh độ lớn góc B và góc C của tam giác ABC .

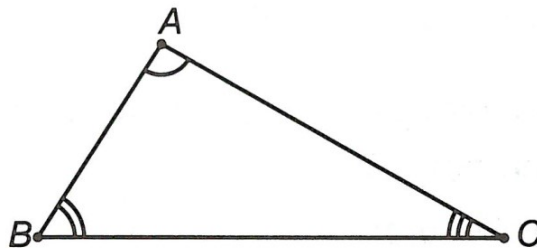
Dạng 2: So sánh hai cạnh trong một tam giác

Phương pháp giải

- Để so sánh hai cạnh trong một tam giác, ta so sánh hai góc đối diện với hai cạnh đó.
- Sử dụng định lí: “Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn”.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$, $\hat{B} + \hat{C} = 80^\circ$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải



Xét $\triangle ABC$ ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Mặt khác $\hat{B} + \hat{C} = 80^\circ$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

$$\text{Mà } \hat{A} = 2\hat{B} \text{ nên } \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 80^\circ - \hat{B} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow BC > AC > AB.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, biết $\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$, $\hat{A} - \hat{C} = 40^\circ$.

a) So sánh các cạnh của $\triangle ABC$

b) Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . So sánh độ dài các đoạn BD và CD .

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 120^\circ \\ \hat{A} - \hat{C} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{C} = 40^\circ \end{cases}.$$

Mặt khác $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

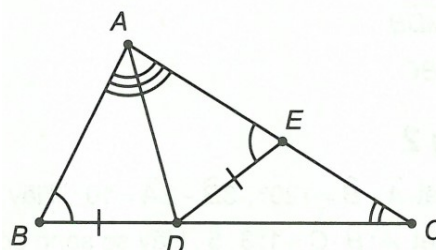
$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}.$$

Do đó $BC > AC > AB$.

b) Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có $AB = AE$, $\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$ (vì AD là tia phân giác của góc A), AD chung.

Do đó $\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ (hai



góc tương ứng); $BD = DE$ (hai cạnh tương ứng).

Ta có $\widehat{DEC} + \widehat{AED} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECD}.$$

Xét $\triangle DEC$ có $\widehat{DEC} > \widehat{ECD}$ nên $DC > DE$.

Mà $BD = DE$. Do đó $DC > BD$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , biết $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4$. So sánh các cạnh của tam giác.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có

$$\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$.

$$\Rightarrow \hat{A} = 40^\circ; \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 80^\circ.$$

Vậy $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$ nên $BC < AC < AB$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Từ C kẻ tia $Cx \parallel MN$, từ M kẻ tia $My \parallel CN$. Hai tia Cx và My cắt nhau tại D . So sánh BC và CD .

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle MDC$ và $\triangle CNM$ có

MC chung,

$$\widehat{DMC} = \widehat{MCN} \text{ (hai góc so le trong do } MD \parallel CN \text{),}$$

$$\widehat{DCM} = \widehat{CMN} \text{ (hai góc so le trong do } CD \parallel MN \text{).}$$

Do đó $\triangle MDC = \triangle CNM$ (g.c.g)

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{CNM} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

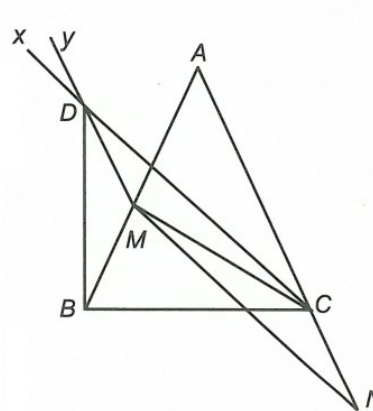
$$DM = CN \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

Mà $CN = BM$ nên $DM = BM$.

Ta có $\widehat{ACM} = \widehat{CNM} + \widehat{CMN}$ (góc ngoài tại đỉnh C của $\triangle CMN$)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{ACM} > \widehat{CNM}$$

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ (do $\triangle ABC$ cân tại A) nên



$$\widehat{ABC} > \widehat{CNM} = \widehat{MDC}.$$

Xét $\triangle MBD$ có $BM = DM \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{MBD} > \widehat{MDC} + \widehat{MDB}$$

$$\text{hay } \widehat{DBC} > \widehat{BDC} \Rightarrow DC > BC.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác ABC , biết $\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$, $3\hat{B} - 2\hat{A} = 10^\circ$. Hãy so sánh độ dài các cạnh trong tam giác ABC .

Câu 2: Cho tam giác ABC , biết $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 1 : 3 : 5$. Hãy so sánh độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Câu 3: Cho tam giác ABC , H là chân đường cao hạ từ đỉnh A , H nằm giữa B và C , $\widehat{BAH} > \widehat{CAH}$. Hãy so sánh độ dài các cạnh AB và AC của tam giác ABC .

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm M nằm giữa A và C . So sánh độ dài BM và BC .

Câu 5: Cho tam giác ABC , $\hat{B} > \hat{C}$ hai đường cao BD và CE . Chứng minh rằng $AC - AB > CE - BD$.

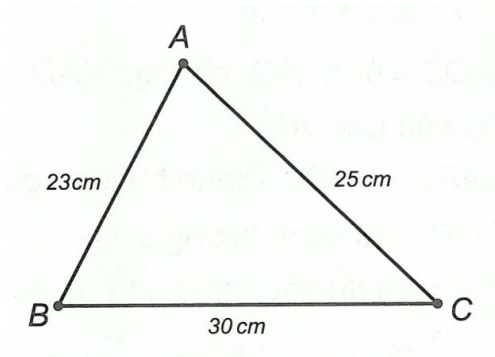
ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. So sánh hai góc trong một tam giác

Câu 1.

Xét $\triangle ABC$, có $AB = 23\text{cm}$, $AC = 25\text{cm}$, $BC = 30\text{cm}$

$$\Rightarrow AB < AC < BC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B} < \hat{A}.$$



Câu 2.

Vì $\triangle ABC$ cân ở A , nên $AB = AC$.

Theo đề bài, ta có $AB + AC + BC = 20\text{cm} \Rightarrow 2AB + BC = 20 \text{ (cm)}$.

Mặt khác $BC = 6\text{cm}$ nên $AB = AC = 7 \text{ (cm)} \Rightarrow AB = AC > BC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} > \hat{A}$.

Câu 3.

Trên AC lấy E sao cho $AE = AB = 6cm$.

Vì $AC = 8cm > AE$ nên E nằm giữa A và C .

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có

$AB = AE$, $\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$ (vì AD là phân giác $\widehat{A}$), AD chung.

Do đó $\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADE}$ (hai góc tương ứng).

Mặt khác E nằm giữa A và C nên

$$\widehat{ADC} = \widehat{ADE} + \widehat{EDC}$$

$\Rightarrow \widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (điều phải chứng minh).

Câu 4.

Kẻ đường cao CH ($H \in BC$).

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot CH = 21 (cm^2) \Rightarrow CH = \frac{21 \times 2}{6} = 7 (cm) \Rightarrow CH = CB \Rightarrow H \equiv B$$

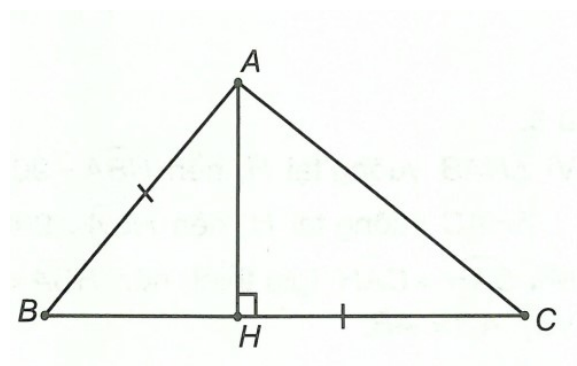
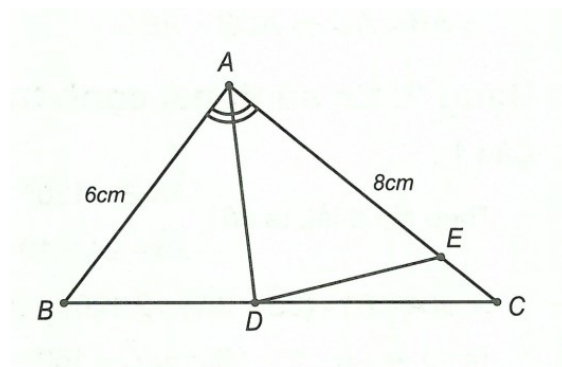
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow AC$ là cạnh huyền $\Rightarrow AC > BC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$.

Câu 5.

Xét $\triangle HAC$ vuông tại H nên AC là cạnh huyền

$\Rightarrow AC > HC$.

Mà $HC = AB$ nên $AC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$.



Câu 6.

Trên tia đối của tia MA , lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$ có

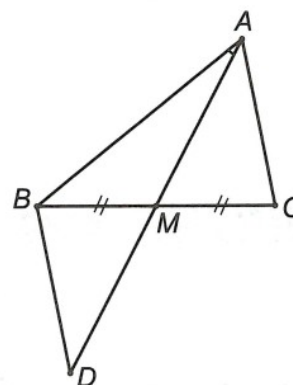
$MB = MC$ (do M là trung điểm của BC), $\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$ (hai góc đối đỉnh), $MA = MD$.

Do đó $\triangle MAC = \triangle MDB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{ACM}$, $\widehat{BDM} = \widehat{MAC}$ và $BD = AC$.

Xét $\triangle ABD$ có

$$\widehat{BAM} < \widehat{MAC} = \widehat{BDM} \Rightarrow AB > BD \Rightarrow AB > AC \Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{ACB}.$$



Câu 7.

Từ D hạ $DP \perp AB$ tại P , $DQ \perp AC$ tại Q .

Xét $\triangle APD$ và $\triangle AQD$ có

$\widehat{APD} = \widehat{AQD} = 90^\circ$; AD chung; $\widehat{PAD} = \widehat{QAD}$ (do AD là phân giác của góc A).

Do đó $\triangle APD = \triangle AQD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow PD = QD$ (hai cạnh tương ứng).

Gọi h là độ dài đường cao hạ từ A xuống BC

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} PD \cdot AB = \frac{1}{2} BD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h;$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DQ \cdot AC = \frac{1}{2} CD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$$

$$\Rightarrow PD \cdot AB = 3h; PD \cdot AC = 5h$$

$$\Rightarrow AB < AC \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC}.$$

Dạng 2. So sánh hai cạnh trong một tam giác

Câu 1.

Theo giả thiết, ta có
$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ \\ 3\widehat{B} - 2\widehat{A} = 10^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{A} + \widehat{B}) + (3\widehat{B} - 2\widehat{A}) = 2 \cdot 120^\circ + 10^\circ \Rightarrow 5\widehat{B} = 250^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 120^\circ - 50^\circ = 70^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow BC > AB > AC.$$

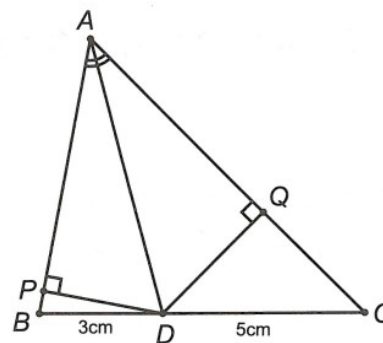
Câu 2.

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{5} \\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \end{cases}.$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có } \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1+3+5} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 20^\circ; \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A} \Rightarrow AB > AC > BC.$$

Câu 3.



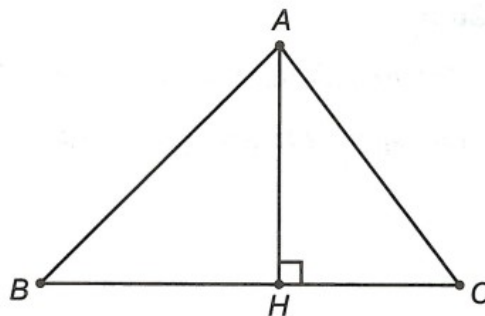
Vì $\triangle HAB$ vuông tại H , nên $\widehat{HBA} = 90^\circ - \widehat{BAH}$;

$\triangle HAC$ vuông tại H , nên $\widehat{HCA} = 90^\circ - \widehat{CAH}$.

Mà $\widehat{BAH} > \widehat{CAH}$ (giả thiết) nên $\widehat{HBA} < \widehat{HCA}$ hay

$$\widehat{B} < \widehat{C} \Rightarrow AC < AB.$$

Vậy $AC < AB$.



Câu 4.

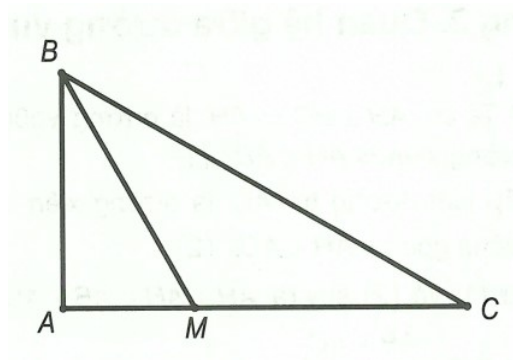
Xét $\triangle MBC$ có

$$\widehat{CMB} = \widehat{MAB} + \widehat{ABM} \text{ (tính chất góc ngoài của tam giác)}$$

$$= 90^\circ + \widehat{ABM} > 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ có $\widehat{CMB}$ là góc tù

$$\Rightarrow \widehat{CMB} > \widehat{BCM} \Rightarrow BC > BM.$$



Câu 5.

Vì $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$.

Trên AC lấy F sao cho $AF = AB$, từ F kẻ $FG \perp AB$

tại G ; kẻ $FH \perp CE$ tại H .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CE \perp AB \\ GF \perp AB \end{cases} \Rightarrow GF \parallel CE \Rightarrow \widehat{GFE} = \widehat{FEH} \text{ (hai}$$

góc so le trong).

Xét $\triangle AGF$ và $\triangle ADB$ có

$$\widehat{AGF} = \widehat{ADB} = 90^\circ; \widehat{A} \text{ chung, } AB = AF.$$

Do đó $\triangle AGF = \triangle ADB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow GF = BD. \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle GFE$ và $\triangle HEF$ có $\widehat{FGE} = \widehat{FHE} = 90^\circ$, EF

chung, $\widehat{GFE} = \widehat{FEH}$.

Do đó $\triangle GFE = \triangle HEF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow GF = EH. \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle HFC$ có FC là cạnh huyền nên $FC > HC$

$$\Rightarrow AC - AF > EC - HE \Rightarrow AC - AB > CE - BD \quad (\text{do } AB = AF).$$

