NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

A.TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

1. ***Để xác định nguyên hàm của hàm số f(x), Chúng ta cần chỉ ra được hàm số F(x) sao cho:*** F'(x) = f(x).

- Áp dụng bảng các nguyên hàm cơ bản, các hàm số sơ cấp .
- Nếu gặp dạng căn thức đưa về dạng số mũ phân theo công thức: $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}, (m \neq 0)$
- Nếu gặp dạng $\frac{P(x)}{x^n}$ thực hiện phép chia theo công thức:

  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, (m > n); \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}, (m < n)$.
- **Công thức đổi biến số (loại 2):**

  Tích phân dạng: $\int f\left(g(x)\right).g'(x)dx$ Đặt g(x) = u => g'(x)dx = du

  $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$.

2. ***Một số dạng cơ bản:***

   1. **Sử dung công thức cơ bản*:***

      1. **Dạng** : $\int (ax+b)^\alpha dx (\alpha \neq 1, a \neq 0)$ đặt u = ax + b $\Rightarrow$ du = adx $\Rightarrow$ dx=$\frac{1}{a}du$

      $$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+!}}{a\left(\alpha+1\right)} + C = \frac{\left(ax+b\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a} + C$$

      2. **Dạng** : $\int \left(ax^n+b\right)^\alpha x^{n-1}dx, (a \neq 0, \alpha \neq 1)$ đặt

      u=ax$^{\mathbf{n}}$ $+b \Rightarrow du = a.n.x^{n-1}dx \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{1}{an}du$

      $$\int (ax^n+b)^\alpha x^{n-1}dx = \frac{1}{an}\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{na(\alpha+1)} + C = \frac{(ax^n+b)^{\alpha+1}}{na(\alpha+1)} + C$$

      3. **Dạng**: a). $\int \cos^\alpha \sin x dx (\alpha \neq -1)$ (Đặt

      $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx) \Rightarrow \int \cos x^\alpha \sin x dx = -\int u^\alpha du = \frac{-1}{(\alpha+1)}\cos^{\alpha+1} x + C$

      b). $\int \mathbf{sin}^\alpha\ \mathbf{x} \cos x dx (\alpha \neq -1)$ (Đặt

      $u = \sin x$ $\Rightarrow$ **du=cos xdx** $\Rightarrow \int \mathbf{sin}^\alpha\ \mathbf{x} \cos x dx = \int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1}\sin^{\alpha+1} x + C$

      4. **Dạng**: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right| + C (a \neq 0)$

      Nếu gặp : $\frac{P(x)}{ax+b}$ với bậc $P(x) \geq 1$: làm bài toán chia.

5. **Dạng**: $\int \frac{dx}{\cos^2 x(a+btgx)}$ Đặt

$$u = a + btgx \Rightarrow du = \frac{bdx}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{b}du;\ \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{co\,s^2}x(a+btgx)} = \frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{b}\ln\left|a+btgx\right| + C$$

2. **Công thức**:

$$\int a^{u(x)}u'(x)dx = \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

3. **Công thức đổi biến số (loại 1):**

Tích phân dạng: $\int f\left(g(x)\right).g'(x)dx$ Đặt g(x) = u => g'(x)dx = du

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

4. **Công thức** :

$$a).\ \int \frac{du}{u^\alpha - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.(a \neq 0)$$

$$b).\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right| + C$$

5. **Công thức :**

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+k}}{2} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

3. Một số dạng thường gặp:

1. Tích phân dạng: 1). $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **2).** $\int \frac{\mathbf{(mx+n)dx}}{ax^2+bx+c}$ **3).** $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **4).** $\int \frac{\mathbf{(mx+n)dx}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Tuỳ vào mỗi dạng áp dụng các công thức tính tích phân chỉ trong bảng sau:

	Tử số bậc nhất	Tử số hằng số
Mẫu số không căn	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
Mẫu số có căn	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left\|u+\sqrt{u^2+k}+C\right\|$

Sử dụng hằng đẳng thức:

$$x^2 + ax = (x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$$

$$ax^2 + bx = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

4. Tích phân của các phân thức hữu tỉ:

$$\frac{ax+b}{cx^3+dx^2+ex}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-m}+\frac{C}{x-n}$$

Giải dạng này ta có hai cách:

– Cách 1: Đồng nhất hai vế: Cho tất cả các hệ số chứa x cùng bậc bằng nhau.

– Cách 2: Gán cho x những giá trị bất kỳ. Thường thì ta chọn giá trị đó là nghiệm của mẫu số

5. Tích phân của các hàm số lương giác:

1. **Dạng**:

$\int \cos^n xdx,\ \int \mathbf{sin^n} xdx,$ 1). $\int \mathbf{cosaxdx=}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\sin ax+C,\quad \int \mathbf{sinaxdx=-}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\cos ax+C$**, 2).** $\int \mathbf{co\ s^n} xdx$

Phương pháp:

❖ n = chẵn : hạ bậc $\begin{cases}\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\\ \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\\ \sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

❖ n lẽ:

Viết: $\cos^{2p+1}xdx=\cos^{2p}x\cos xdx=(1-\sin^2 x)^p\cos dx$

Đặt $u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx$

2. **Dạng**: $\int \sin^m u\cos^n udu$

   a. m,n cung chẫn: hạ bậc.

   b. m,n lẻ (một trong hai số lẻ hay cả hai cùng lẻ).

   ❖ **Nếu m lẻ**: Ta viết: $\sin^m u=\sin^{m-1}u\sin u$ thay

   $\sin^2 u=1-\cos^2 u$ **va** $\mathbf{sin^m}u=(1-\cos^2 u)^{\frac{m-1}{2}}\sin u$

   ❖ **Nếu m, n lẻ**: làm như trên cho số mũ nào bé

3. **Dạng**: $\int tg^n xdx$ hay $\int \cot g^n xdx$

Chú ý: $d(tgx)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}=(1+tg^2x)dx\ \Rightarrow\ \int\dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{co\ s^2}x}=\int(1+tg^2x)dx=tgx+C$

❖ Tương tự:

$d(\cot gx)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-(1+cotg^2x)dx\ \Rightarrow\ \int\dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{sin^2}x}=\int(1+cotg^2x)dx=-cotgx+C$

❖ Ngoại trừ: $\int tgxdx=\int\dfrac{\sin xdx}{\cos x}=\ln\left|\cos x\right|+C$ **(u=cosx)**

Để tính: $\int tg^n xdx$

Phương pháp:

Làm lượng (tg^2x+1) xuất hiện bằng cách viết:

$* \ tg^{2n}x = tg^{2n-2}x(tg^2x+1) - tg^{2n-4}(tg^2x+1) + ... + ... + (-1)^{n-1}(tg^2x+1) + (-1)^n 1$

$* \ tg^{2n-1}x = tg^{2n-3}x(tg^2x+1) - tg^{2n-5}(tg^2x+1) + ... + ... + (-1)^{n-2}tgx(tg^2x+1) + (-1)^{n-1}tgx$

4. **Dạng**: $\int (tg^2x+1)dx$ hay $\int \frac{dx}{\cos^{2n}x}$

   Ta viết: $\int (tg^2x+1)dx = \int (tg^2x+1)^{n-1}(tg^2x+1)dx$

   Đặt u = tgx $du = (tg^2x+1)dx \Rightarrow \int \mathbf{(tg^2x+1)^n dx} = \int (u^2+1)^{n-1}du$

   Chú ý: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2x$, $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{cos^{2n}}x} = \int (1+tg^2x)^n dx$

5. **Dạng**: $\int \frac{tg^m x}{\cos^n x}dx$, **or** $\int \frac{\mathbf{cotg^m x}}{\mathbf{sin^n x}}dx$

   Phương pháp:

   ❖ Nếu n chẵn : Thay

   $\frac{1}{\cos^n x} = (1+tg^2x)^{\frac{n}{2}}; \Rightarrow \int \frac{\mathbf{tg^m}xdx}{\cos^n x} = \int tg^m x(1+tgx)^{\frac{n}{2}}dx = \int tg^m x(1+tgx)^{\frac{n}{2}-2}(tgx+1)dx$

   Đặt: $u = tgx \Rightarrow$ **du=(1+tg²x)dx** $\Rightarrow \int \frac{\mathbf{tg^m x}}{\mathbf{cos^n x}}dx = \int u^m(1+u^2)^{\frac{n}{2}-2}du$

   ❖ Nếu m lẻ và n lẻ : $\frac{tgx}{\cos x} = \frac{tg^{m-1}x}{\cos^{n-1}x}.\frac{tgx}{\cos x}$ Đặt $u = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$ $\mathbf{du} = \frac{\mathbf{tgx}}{\mathbf{cosx}}dx$

   Thay:

   $tgx = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \int \frac{\mathbf{tgmx}}{\mathbf{cos^n x}}dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)^{\frac{m-1}{2}}.\frac{1}{\cos^{n-1}x}.\frac{tgx}{\cos x}dx = \int (u^2-1)^{\frac{m-1}{2}}u^{n-1}du$

6. **Dạng**: $\int \sin mx \cos nx dx$; $\int$ **sinmxsinnxdx** ; $\int$ **cosmxcosnxdx**

Áp dụng các công thức biến đổi:

- **sinmxcosnx=** $\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$
- **sinmxsinnx=** $\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$
- **cosmxcosnx=** $\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

I. *Tính các tích phân bất định.*

Bài 1: Dùng các công thức cơ bản tính các tích phân sau:

1/ $\int (3x^2 + 2x - \frac{1}{x})dx$ 2/ $\int \frac{x-3}{x^2}dx$

3/ $\int 2(\sqrt{x} - \frac{3}{x^4})dx$ 4/ $\int (3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

5/ $\int e^x(2 - \frac{e^{-x}}{3\sqrt[3]{x^2}})dx$ 6/ $\int 2^x.3^{2x}4^{3x}dx$

7/ $\int \cos x(1 + tgx)dx$ 8/ $\int (4\sin x - \frac{2}{\cos^2 x})dx$

9/ $\int 2\cos^2 \frac{x}{2}dx$ 10/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$

Bài 2: Tính các tích phân sau đây:

1/ $\int x(x-1)^{10}dx$ 2/ $\int (\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2})dx$

3/ $\int x\sqrt{x^2+9}dx$ 4/ $\int \frac{8x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^2}}dx$

5/ $\int \frac{e^{3.\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 6/ $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}\ln^2 \mathbf{x}}$

7/ $\int \sin 7x.\cos 3x.dx$ 8/ $\int \cos^4 xdx$

9/ $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ 10/ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx$

II: Tính các tích phân xác định sau:

<u>Phương pháp</u>:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a).$$

1. *Các phương pháp tính tích phân.*

- Áp dụng bảng các nguyên hàm cơ bản, các hàm số sơ cấp .
- Tính tích phân bằng phương pháp phân tích.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng I.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng II.
- Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng III.
- Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần.
- Tính tích phân bằng phương pháp sử dụng nguyên hàm phụ.
- Một số thủ thuật đổi biến khác, tích phân chứa biểu thức giá trị tuyệt đối...

2. *Chứng minh bất đẳng thức tích phân*

Để chứng minh bất đẳng thức tích phân , ta thường sử dụng chủ yếu 4 tính chất sau: với các hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a;b] ta có:

1. ***Nếu*** $f(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

2. ***Nếu*** $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi f(x) = g(x), $\forall x \in [a;b]$

3. Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a;b]$ thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

Bài 1: Tính các tích phân xác định sau:

1/ $\int_0^2 (3x^2 - 2x^3 + 4x^4)dx$ 2/ $\int_{-1}^1 (-x^3 + 3x)^2 dx$

3/ $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$ 4/ $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3}dx$

5/ $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}dx$ 6/ $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}}$

7/ $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2}dx$ 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x}dx$

9/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x.\cos 3x dx$ 10/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2tg^2 x + 5}{\sin^2 x}dx$

11/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}dx$ 12/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)dx$

Bài 2: Tính các tích phân có chứa trị tuyệt đối sau*:*

1/ $\int_{-2}^2 |x - 1|dx$ 2/ $\int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9}dx$

3/ $\int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2|dx$ 4/ $\int_{-1}^1 |e^x - 1|dx$

5/ $\int_{-3}^{3}(3+|x|)dx$

6/ $\int_{-2}^{0}x^2|x+1|dx$

7/ $\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx$

8/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\cos 2x+1}dx$

9/ $\int_{0}^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}dx$

10/ $\int_{0}^{3}|2^x-4|dx$

Bài 3: Chứng minh các BĐT sau:

1/ $3\le\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}dx\le 6$

2/ $1\le\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}dx\le\frac{\sqrt{5}}{2}$

3/ $1\le\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2+1}\le 2$

4/ $\frac{\pi}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3+\sin^2 x}dx\le\frac{5\pi}{4}$

5/ $\frac{\pi}{4}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{3-2\sin^2 x}\le\frac{\pi}{2}$

6/ $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{tg^2x+3}dx\le\frac{\pi}{2}$

7/ $\frac{\pi}{2}\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}dx\le e^{\frac{\pi}{2}}$

8/ $\int_{1}^{2}e^{x+1}dx\le\int_{1}^{2}e^{2x}dx$

9/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx\le\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

10/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\le 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

B: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN:

Phương pháp:

1. **Dạng**: $\int R(x^{\frac{1}{n}},x^{\frac{1}{m}})dx$ Đặt $t=x^{\frac{1}{mn}}$ $\Rightarrow$ **$x=t^{mn}$** $\Rightarrow$ **$dx=mnt^{mn-1}dt$**
2. **Dạng**: $\int R\left[(ax+b)^{\frac{1}{n}},(ax+b)^{\frac{1}{m}}\right]dx$

   Đặt **$t=(ax+b)^{\frac{1}{mn}}$** $\Rightarrow$ **$ax+b=t^{mn}$** $\Rightarrow$ **$dx=\frac{mn}{a}t^{mn-1}dt$**
3. **Dạng** : $\int R(\ln x)\frac{dx}{x}$ đặt $u=\ln x$ $\Rightarrow$ **$du=\frac{dx}{x}$** $\Rightarrow$ $\int R(\ln x)\frac{dx}{x}=\int R(u)du$

4. **Dạng**: $\int \mathbf{R(e^x)dx}$ đặt

$\mathbf{u=e^x} \Rightarrow \mathbf{du=e^x dx} \Rightarrow \mathbf{dx=\frac{du}{u}} \Rightarrow \int \mathbf{R(e^x)dx} = \int R(u)\frac{du}{u}$

5. **Dạng** : $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Đưa tam thức ax^2+bx+c về dạng: $\mathbf{u^2+m^2, u^2-m^2}$ hay. $\mathbf{m^2-u^2}$

Đổi tích phân thành 1 trong các dạng sau:

1). $\int \mathbf{R(u,\sqrt{m^2-u^2})du}$.

2). $\int \mathbf{R(u,\sqrt{m^2+u^2})du}$.

3). $\int \mathbf{R(u,\sqrt{m^2-u^2})du}$.

Nếu dưới dấu tích phân có chứa

- $\sqrt{\mathbf{m^2-u^2}}$ đặt $\mathbf{u=msint} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{m^2-u^2}} \mathbf{=mcost}$
- $\sqrt{\mathbf{m^2+u^2}}$ đặt $\mathbf{u=mtgt} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{m^2+u^2}} = \mathbf{\frac{m}{cost}}$
- $\sqrt{\mathbf{u^2-m^2}}$ đặt $\mathbf{u=\frac{m}{cost}} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{u^2-m^2}} \mathbf{=mtgt}$

6. **Dạng** : $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Gặp tích phân này đặt: $\mathbf{t=\frac{1}{mx+n}}$

Bài 1: Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến loại I

1/ $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$	2/ $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$
3/ $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$	4/ $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$
5/ $\int_0^5 x.\sqrt{x+4}dx$	6/ $\int_0^7 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}dx$
7/ $\int_0^{\sqrt{5}} x^3.\sqrt{x^2+4}dx$	8/ $\int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$
9/ $\int_1^2 \frac{dx}{1-e^{-x}}$	10/ $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}.e^{\sqrt{x}}}$
11/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{tgx+2}}{\cos^2 x}dx$	12/ $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}dx$

13/ $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln^2 x}{x}dx$ 14/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+4\sin x}.\cos xdx$

15/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot gx(1+\frac{1}{\sin^2 x})dx$ 16/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\sin 2xdx$

17/ $\int_{0}^{\pi/6}\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}dx$ 18/ $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x.\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

19/ $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ 20/ $\int_{0}^{\pi/3}\sqrt{\cos x}.\sin^3 x.dx$

Bài 2 : Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến loại II*:*

1/ $\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}dx$ 2/ $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

3/ $\int_{1}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}dx$ 4/ $\int_{-5}\frac{dx}{x^2+4x+7}$

5/ $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 6/ $\int_{2}^{4/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$

7/ $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 8/ $\int_{2\sqrt{3}}^{6}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

9/ $\int_{-1}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 10/ $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2}dx$

11/ $\int_{-1}^{1/2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ 12/ $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2-1}dx$

13/ $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$ 14/ $\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2+3}$

Bài 3 : Tính tích phân các hàm số hữu tỉ:

1/ $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(2x+1)}$ 2/ $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-6x+9}$

3/ $\int_{1}^{2}\frac{6x+7}{x}dx$ 4/ $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^4+x^2+1}dx$

5/ $\int_{3}^{4}\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$ 6/ $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{(x+1)^2}$

7/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 2xdx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$ 8/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx$

9/ $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ 10/ $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2}dx$

11/ $\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{4x^2-4x-3}$ 12/ $\int_{2}^{4}\frac{(x^3+x^2-x+1)dx}{x^4-1}$

13/ $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ 14/ $\int\frac{x^{2001}dx}{(x^2+1)^{2001}}$

15/ $\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{x^4-2x^2+1}$ 16/ $\int_{0}^{1}\frac{3dx}{1+x^3}$

C: PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Công thức: $\int_{a}^{b}u.dv=u.v\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v.du$

- Công thức cho phép thay một tích phân $\int \mathbf{udv}$ phức tạp bằng 1 tích phân $\int \mathbf{vdu}$ đơn giản hơn.
- Công thức dùng khi hàm số dưới dấu tích phân có dạng:

– Dạng tích số:

– Hàm số logaric.

– Hàm số lượng giác.

* Dạng $\mathbf{x^n f(x)}$ với f(x) là hàm $e^x, \ln x, \sin x, \cos x.$

- Khi tính chọn:

– Hàm số phức tạp đặt bằng u.

– Hàm số cos tích phân được cho trong bảng tích phân thường dùng làm **dv**

Bài 1: Dùng phương pháp tích phân từng phần hãy tính:

1/ $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 2/ $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$

3/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx$ 4/ $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$

5/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2\cos^2 x-1)dx$ 6/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

7/ $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$ 8/ $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$

9/ $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\cos\sqrt{x}\,dx$ 10/ $\int_0^{\sqrt{3}} \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$

11/ $\int_0^1 (x+1)^2.e^{2x}dx$ 12/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1).\sin x.dx$

13/ $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ 14/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\sin x.\cos x.dx$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ 2/ $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$

3/ $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ 4/ $\int_1^e \ln^2 x\,dx$

5/ $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$ 6/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(x+\sin x)dx$

7/ $\int_0^{\pi} e^x\sin^2(\pi x)dx$ 8/ $\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}dx$

9/ $\int \frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x}dx$ 10/ $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

D: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 - 2x + 2$;tiếp tuyến (d) của nó tại điểm M(3;5) và Oy.

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 + 2x$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

Bài 3: Cho hàm số $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 5}{x - 1}$ (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) ; tiệm cận của nó và x = 2 ; x= 3.

Bài 4: Cho hàm số $y = (x+1)(x-2)^2$ (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng : $x - y + 1 = 0$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{2} - x^2 - \dfrac{3}{2}$ (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

Bài 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y^2 = 4x$ và đường thẳng d : $4x - 3y - 4 = 0$.

Bài 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y^2 + x - 5 = 0$ và đường thẳng d : $x + y - 3 = 0$.

Bài 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = 0 ; y = tgx ; y = cotgx $(0 \le x \le \pi)$.

Bài 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (C): $x^2 + y^2 = 8$ và đường (P): $y^2 = 2x$.

Bài 10: Tính thể tích hình tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường : $y = \dfrac{4}{x}$ và $y = -x + 5$ quay quanh Ox.

Bài 11: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ (C) . Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi (C) trục Ox và hai đường thẳng x = -1 , x = 0. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay một vòng xung quanh Ox.

Bài 12: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ (C) . Gọi (H) là phần hình phẳng giới hạn bởi (C) trục Ox và hai đường thẳng x = 0, x = 1. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi (H) quay một vòng xung quanh Ox.

Bài 13: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi : $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và $y = 0$ khi ta quay quanh (D) quanh Oy.

Bài 14: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi :

y = $\mathbf{xe^x}$, x = 1 và y = 0 ($\mathbf{0 \le x \le 1}$) khi ta quay quanh (D) quanh Ox.

Bài 15: Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành do hình phẳng (D) giới hạn bởi : y = sinx , y = cosx , x = $\frac{\pi}{\mathbf{2}}$ và $\mathbf{(0 \le x \le \frac{\pi}{2})}$ khi ta quay quanh (D) quanh Ox.

Bài 16: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

1/ $y = 0; y = x^2 - 2x$ và x = -1; x = 2.

2/ $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = x + 3$

3/ $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

4/ $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}; y = 0; x = 1$ và $x = e$.

5/ $y = x\sqrt{x^2 + 1}; Ox$ và $x = 1$.

E. DẠNG THƯỜNG GẶP TRONG CÁC KÌ THI ĐH-CĐ

Bài 1: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$

2/ $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$

3/ $\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1})dx$

4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x.dx$

5/ $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

6/ $\int_0^1 x^3\sqrt{1 - x^2}dx$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + 2\sin 2x}dx$

8/ $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

9/ $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x + 1).e^x}{\sqrt{e^x - 1}}dx$

10/ $\int_0^2 (3x^2 - 1)\left|x^2 + 3x - 4\right|dx$

Bài 2: Cho hàm số: f(x) = $\frac{a}{(x+1)^3} + bx.e^x$

Tìm a, b biết f'(0)=-22 và $\int_0^1 f(x)dx = 5$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx$ 2/ $\int_0^1 x^3.e^{x^2} dx$

3/ $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}\ln x.dx$ 4/ $\int (\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}})dx$

5/ $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}dx$ 6/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.\sin 3x.dx$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)dx$ 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx$

9/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 10/ $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\sin x})dx$ 2/ $\int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4}dx$

3/ $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx$ 4/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx$

5/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x - 3\sin x + 1}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$ 6/ $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$

7/ $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$ 8/ $\int_0^1 (x^2+2x)e^{-x}dx$

9/ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\mathrm{tg}^4 x}{\cos 2x}dx$ 10/ $\int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$

Bài 4: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$ 2/ $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

3/ $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ 4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

5 $\int_0^{\pi} x.\sin x dx$ 6/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^3 x.dx$

7/ $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}dx$ 8/ $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$

9/ $\int_0^2 \frac{x^4-x+1}{x^2+4}dx$ 10/ $\int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4}dx$

Bài 5: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^3 \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 2/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x}\ln x.dx$

3/ $\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$ 4/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tgx}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

5/ $\int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 dx$ 6 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

7/ $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.tg^2 x dx$

9/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$ 10/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+tgxtg\frac{x}{2}\right)\sin xdx$

Bài 6: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_{-3}^5 (|x+2|-|x-2|)dx$ 2/ $\int_0^2 \frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx$

3/ $\int_{-1}^4 \frac{2}{\sqrt{x+5}+4}dx$ 4/ $\int_0^1 (4x^2-2x-1).e^{2x}dx$

5/ $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ 6/ $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+5x+2}$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x+1}dx$ 8/ $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx$

9/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx+e^{\sin x}\cos x)dx$ 10/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}}dx$

Bài 7: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2004} x}{\sin^{2004} x + \cos^{2004} x} dx$

2/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$

3/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x.\cos x}{1+\cos x} dx$

4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

5/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x.dx$

6/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$

7/ $\int \frac{2xdx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

8/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$

9/ $\int_{-1}^{0} x\left(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}\right)dx$

10/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin^2 x}{\sin 2x \cos^2 x} dx$

Bài 8: Tính các tích phân sau.

1/ $\int_{-1}^{1} x^{2004} \sin x.dx$

2/ $\int_0^{\pi} x.\sin x.\cos^2 x.dx$

3/ $\int_0^{2\pi} x.\cos^3 x.dx$

4/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

5/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$

6/ $\int_0^{1} x.tg^2 x dx$

7/ CM: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{x} dx$

8/ CM: $\pi < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} < 2\pi$

9/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 5x dx$

10/ $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x} \cos\sqrt{x} dx$

CHÚC CÁC EM LÀM BÀI TỐT !