

Giải bài tập SBT Toán Hình 12 bài 1: Khái niệm về mặt tròn xoay

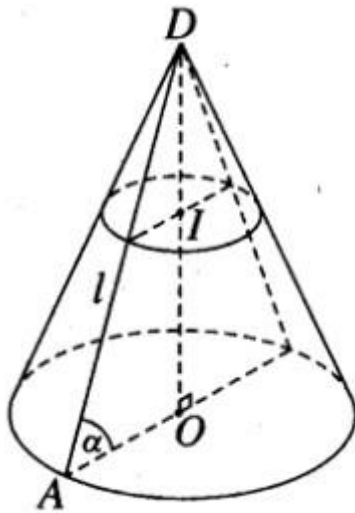
Câu 1: Một hình nón tròn xoay có đỉnh là D , tâm của đường tròn đáy là O , đường sinh bằng l và có góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng α .

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo nên.

b) Gọi I là một điểm trên đường cao DO của hình nón sao cho

$DI/DO = k$ ($0 < k < 1$). Tính diện tích thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

Hướng dẫn làm bài:



a) Gọi r là bán kính của đường tròn đáy.

Ta có $OA = r = l \cdot \cos \alpha$ (với O là tâm của đường tròn đáy và A là một điểm trên đường tròn đáy).

Ta suy ra: $S_{xq} = \pi r l = \pi l^2 \cos \alpha$

Khối nón có chiều cao $h = DO = l \sin \alpha$. Do đó thể tích V của khối nón được tính theo công thức

$$V = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{3} \pi l^2 \cos^2 \alpha \cdot l \sin \alpha = \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

b) Thiết diện qua I và vuông góc với trục hình nón là một hình tròn bán kính r' với $r'/r = DI/DO = k$

Gọi s là diện tích của thiết diện và S là diện tích của đáy hình tròn ta có:

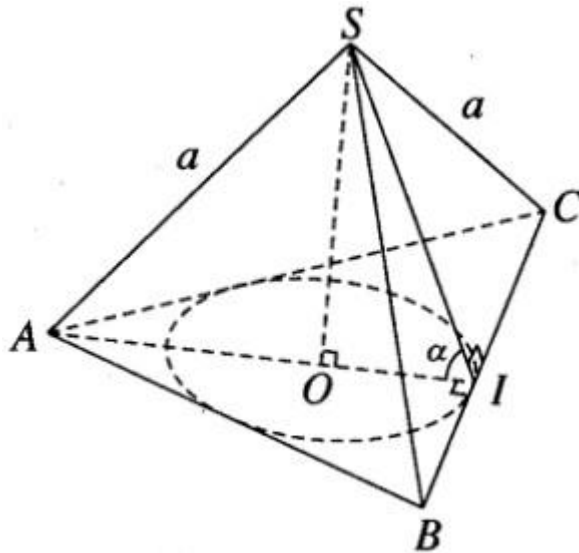
$$s/S = k^2 \Leftrightarrow s = k^2 S, \text{ trong đó } S = \pi r^2 = \pi l^2 \cos^2 \alpha$$

Vậy diện tích của thiết diện đi qua điểm I và vuông góc với trục hình nón là:

$$s = k^2 S = k^2 \pi l^2 \cos^2 \alpha$$

Câu 2: Cho S.ABC là hình chóp tam giác đều có các cạnh bên bằng a và có góc giữa các mặt bên và mặt phẳng đáy là α . Hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC gọi là hình nón nội tiếp hình nón đã cho. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α .

Hướng dẫn làm bài:



Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC. Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{SIO} = \alpha$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và

$$\begin{cases} h = r \tan \alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases} \quad (\text{vì } SA^2 = SO^2 + AO^2)$$

$$\text{Do đó } a^2 = r^2 \tan^2 \alpha + 4r^2 = r^2 (\tan^2 \alpha + 4)$$

$$\text{Vậy } r = \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$$

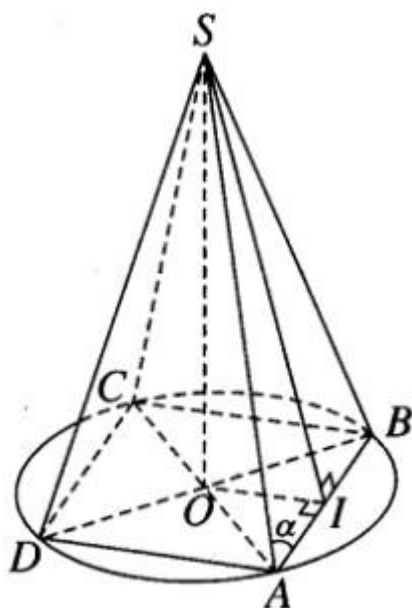
$$\text{Hình nón nội tiếp có đường sinh là: } l = SI = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$$

Diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp hình chóp S.ABC là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}} \cdot \frac{a}{\cos \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha + 4}} = \frac{\pi a^2}{\cos \alpha (\tan^2 \alpha + 4)}$$

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SO = h$ và góc $SAB = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD của hình chóp.

Hướng dẫn làm bài:



Gọi r là bán kính đáy của hình nón ta có $OA = r$, $SO = h$ và $SA = SB = SC = SD = l$ là đường sinh của hình nón.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB , ta có:

$$\begin{cases} SA^2 = SO^2 + OA^2 \\ AI = SA \cdot \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = h^2 + r^2 (1) \\ \frac{r\sqrt{2}}{2} = l \cos \alpha (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow r = \sqrt{2}l \cos \alpha$$

$$(1) \Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2 \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow h^2 = l^2(1 - 2\cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{h^2}{1 - 2\cos^2 \alpha}$$

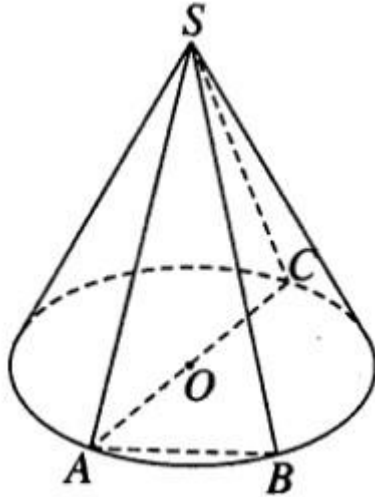
$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}}$$

$$\text{Do đó } r = \sqrt{2}l \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}h \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}}$$

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}h \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}} \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha}} = \frac{\pi \sqrt{2} h^2 \cos \alpha}{1 - 2\cos^2 \alpha}$$

Câu 4: Chứng minh rằng trong một khối nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.

Hướng dẫn làm bài:

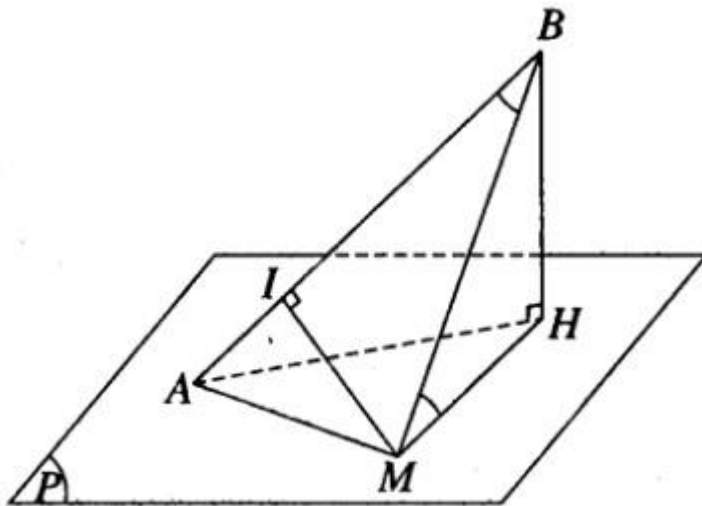


Xét hai đường sinh SA, SB tùy ý của hình nón. Vẽ đường kính AC của đường tròn đáy. Ta có góc ASC là góc ở đỉnh của hình nón. Hai tam giác ASC và ASB có hai cặp cạnh bằng nhau vì chúng cùng là đường sinh của hình nón.

Ta có cạnh $AC \geq AB$ nên $\angle ASC \geq \angle ASB$. Đó là điều cần chứng minh.

Câu 5: Cho mặt phẳng (P). Gọi A là một điểm nằm trên (P) và B là một điểm nằm ngoài (P) sao cho hình chiếu H của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (P) sao cho góc $\angle ABM = \angle BMH$. Chứng minh rằng điểm M luôn luôn nằm trên một mặt trụ xoay có trục là AB.

Hướng dẫn làm bài:

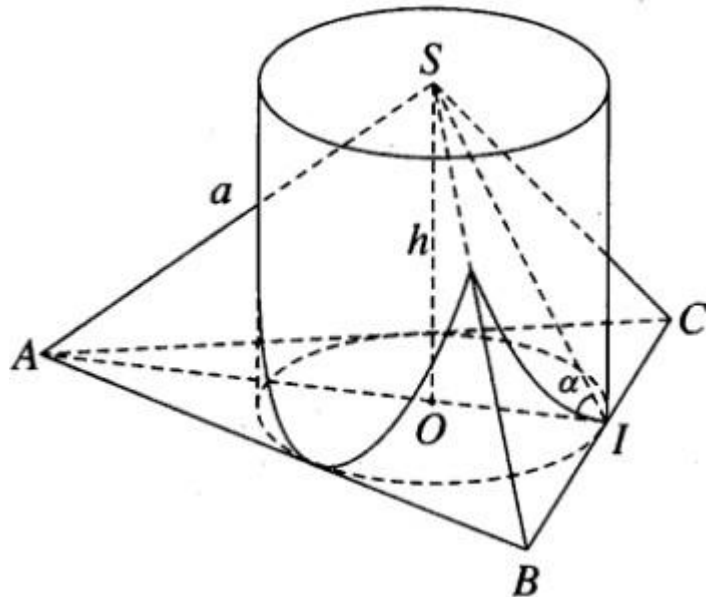


Giải sử ta có điểm M thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn các điều kiện của giả thiết đã cho. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Hai tam giác vuông BIM và MHB bằng nhau vì có cạnh huyền chung và một cặp góc nhọn bằng nhau. Do đó $MI = BH$ không đổi. Vậy điểm M luôn luôn nằm trên mặt trụ trục AB và có bán kính bằng BH.

Câu 6: Hình chóp tam giác đều S.ABC có $SA = SB = SC = a$ và có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α . Tính diện tích xung quanh của hình trụ có

đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đáy của hình chóp và có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp. Các mặt bên SAB, SBC, SCA cắt hình trụ theo những giao tuyến như thế nào?

Hướng dẫn làm bài:



Theo giả thiết ta có tam giác đáy ABC là tam giác đều.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC. Theo giả thiết ta có $SA = a$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và $\angle SIA = \alpha$

$$\text{Do đó } \begin{cases} h = r \tan \alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a^2 = r^2 \tan^2 \alpha + 4r^2 = r^2 (\tan^2 \alpha + 4)$$

$$\text{Ta suy ra } r = \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}} \text{ và } h = \frac{a \tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$$

$$\text{Gọi } S_{xq} \text{ là diện tích xung quanh của hình trụ ta có công thức } S_{xq} = 2\pi r l \text{ trong đó } r = \frac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$$

$$\text{và } l = h = \frac{a \tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a^2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 4}$$

Các mặt bên SAB, SBC, SCA là những phần của ba mặt phẳng không song song với trục và cũng không vuông góc với trục nên chúng cắt mặt phẳng xung quanh của hình trụ theo những cung elip. Các cung này có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng (ABC) tạo nên đường tròn đáy của hình trụ.