

Giải bài tập lớp 10 Ôn tập chương 6

Bài 1 (trang 155 SGK Đại số 10): Hãy nêu định nghĩa của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ và giải thích vì sao ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Trên đường tròn lượng giác trong mặt phẳng Oxy, lấy điểm A (1;0)

điểm M (x ; y) với $\widehat{AM} = \alpha$
• $y = \sin \widehat{AM} \Rightarrow y = \sin \alpha$
• $x = \cos \widehat{AM} \Rightarrow x = \cos \alpha$
Mà $\widehat{AM} = \alpha + k.2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Nên $\sin(\alpha + k.2\pi) = \sin \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 $\cos(\alpha + k.2\pi) = \cos \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 2 (trang 155 SGK Đại số 10): Nêu định nghĩa của $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ và giải thích vì sao ta có:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, k \in \mathbb{Z};$$

Lời giải

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
Suy ra, $\tan(\alpha + k\pi) = \frac{\sin(\alpha + k\pi)}{\cos(\alpha + k\pi)}$
Mà • $\sin(\alpha + k.\pi) = \sin \alpha$
• $\cos(\alpha + k.\pi) = \cos \alpha$
nếu k chẵn
và • $\sin(\alpha + k.\pi) = -\sin \alpha$
• $\cos(\alpha + k\pi) = -\cos \alpha$
nếu k lẻ
nên $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$ (xem 3), trang 147)

Bài 3 (trang 155 SGK Đại số 10): Tính:

a. $\sin \alpha$, nếu $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b. $\cos \alpha$ nếu $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c. $\tan \alpha$ Nếu $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

d. $\cot \alpha$ nếu $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Lời giải

a. Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin \alpha > 0$

ta có: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b. nếu $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ thì $\cos \alpha < 0$

Ta có: $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + 8}} = -\frac{1}{3}$

c. Nếu $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ thì $\tan \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$

ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{2}{3}\right) : \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d. Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\cot \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$

ta có: $\cot \alpha = \left(-\frac{1}{4}\right) : \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

Bài 4 (trang 155 SGK Đại số 10): Rút gọn biểu thức:

a. $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

b. $\tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$

c. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$

d. $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} \\
&= \frac{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha(1 + \cos 2\alpha)} \\
&= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \\
\text{b. } & \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\
&= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha \\
\text{c. } & \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} \\
&= \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} \right) + \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right)}{\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{-\sqrt{2} \sin \alpha} = -\cot \alpha \\
\text{d. } & \frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2 \cos 4\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha \sin \alpha}{2 \cos 4\alpha} = \sin \alpha
\end{aligned}$$

Bài 5 (trang 156 SGK Đại số 10): Tính:

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \cos \frac{22\pi}{3} \\
\text{b. } & \sin \frac{23\pi}{4} \\
\text{c. } & \sin \frac{25\pi}{3} - \tan \frac{10\pi}{3} \\
\text{d. } & \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a. } \cos \frac{22\pi}{3}$$

$$= \cos \left(8\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b. } \sin \frac{23\pi}{4}$$

$$= \sin \left(6\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c. } \sin \frac{25\pi}{3} - \tan \frac{10\pi}{3}$$

$$= \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \tan \left(3\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d. } \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 6 (trang 156 SGK Đại số 10): Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{b. } \tan(267^\circ) + \tan 93^\circ = 0$$

$$\text{c. } \sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$$

$$\text{d. } \cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sin 75^\circ + \cos 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) + \cos(45^\circ + 30^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ + \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{b. Vì } 267^\circ + 93^\circ = 360^\circ \text{ nên } 267^\circ = -93^\circ + 360^\circ.$$

$$\Rightarrow \tan 267^\circ = \tan(-93^\circ) = -\tan 93^\circ.$$

$$\text{Vậy } \tan 267^\circ + \tan 93^\circ = -\tan 93^\circ + \tan 93^\circ = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \sin 65^\circ + \sin 55^\circ &= 2 \sin \left(\frac{65^\circ + 55^\circ}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{65^\circ - 55^\circ}{2} \right) \\
 &= 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 5^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ (dpcm)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \cos 12^\circ - \cos 48^\circ &= -2 \sin \left(\frac{12^\circ + 48^\circ}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{12^\circ - 48^\circ}{2} \right) \\
 &= 2 \sin 30^\circ \cdot \sin(-18^\circ) = 2 \sin 30^\circ \cdot \sin 18^\circ = \sin 18^\circ.
 \end{aligned}$$

Bài 7 (trang 156 SGK Đại số 10): Chứng minh các đồng nhất thức sau đây:

$$\text{a. } \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$$

$$\text{b. } \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{c. } \frac{2 \cos 2x - \sin 4x}{2 \cos 2x + \sin 4x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\text{d. } \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \sin y}$$

Lời giải

$$a. \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{2 \sin x \cos x - \sin x} = \frac{\cos x (2 \cos x - 1)}{\sin x (2 \cos x - 1)} = \cot x$$

$$b. \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}$$

$$c. \frac{2 \cos 2x - \sin 4x}{2 \cos 2x + \sin 4x} = \frac{2 \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x}{2 \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)} = \frac{2 \sin^2 x \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{2 \cos^2 x \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$d. \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$$

Bài 8 (trang 156 SGK Đại số 10): Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

$$a. A = \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$b. B = \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

$$c. C = \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

$$d. D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a. Ta có: } A &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\
 &= \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x - \cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\sin x \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x - \cos x - \sin x) = 0
 \end{aligned}$$

vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

$$\begin{aligned}
 \text{b. Ta có: } B &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \\
 &= \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x \\
 &= \cos x\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \sin x\left(\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 0\cos x + 0\sin x = 0
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

c. Ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= \sin^2 x + \left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right] \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \frac{\pi}{3} \cos^2 x - \sin^2 x \cdot \frac{\pi}{3} \sin^2 x \\
 &= \frac{1}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) - \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

$$\text{d. Ta có: } D = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.