

Giải bài tập Toán 11 Giải tích: Ôn tập chương 3

Bài 1 (trang 107 SGK Đại số 11):

Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1} - u_n = q \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng nếu công sai $q > 0$, dãy số giảm nếu công sai $q < 0$.

Bài 2 (trang 107 SGK Đại số 11): Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q . Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a. $q > 0$

b. $q < 0$

Lời giải:

a. Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad \forall n > 1, q > 0, u_1 < 0 \Rightarrow u_n < 0 \quad \forall n > 1$

b. Nếu $q < 0, u_1 < 0$, ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot |u_1| \cdot |q|^{n-1} \quad \forall n > 1$$

$u_n > 0$ nếu n chẵn, và $u_n < 0$ nếu n lẻ.

Bài 3 (trang 107 SGK Đại số 11): Cho hai cấp số cộng có cùng các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số cộng không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

Lời giải:

Giả sử có hai cấp số cộng $(u_n), (v_n)$ có công sai lần lượt là d^1, d^2 cùng các số hạng bằng nhau, nghĩa là:

$$u_1, u_2, \dots, u_n \quad (1) \quad \text{và} \quad v_1, v_2, \dots, v_n \quad (2)$$

Xét dãy số (a_n) với $a_n = u_n + v_n, n \in \mathbb{N}^*$

$$a_1 = u_1 + v_1$$

$$a_2 = u_2 + v_2 = u_1 + d_1 + v_1 + d_2 = (u_1 + v_1) + (d_1 + d_2)$$

$$a_n = u_n + v_n = u_1 + (n-1)d_1 + v_1 + (n-1)d_2$$



$$= (u_1 + v_1) + (n - 1)(d_1 + d_2)$$

Điều đó cho thấy dãy số mà mỗi số hạng là tổng các số hạng tương ứng của hai cấp số cộng (1) và (2) cũng là một cấp số cộng với công sai bằng tổng các công sai của hai cấp số cộng kia.

Ví dụ: 1, 4, 7, 10, 13, 16 công sai: $d_1 = 3$

20, 18, 16, 14, 12, 10 công sai: $d_2 = -2$

Dãy tổng các số hạng tương ứng là: 21, 22, 23, 24, 25, 26 là cấp số cộng có công sai

$$d = d_1 + d_2 = 3 + (-2) = 1.$$

Bài 4 (trang 107 SGK Đại số 11): Cho hai cấp số nhân có cùng các số hạng. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

Lời giải:

Giả sử có hai cấp số nhân (u_n) , (v_n) với công bội tương ứng q_1 và q_2 .

Xét dãy số (a_n) với $a_n = u_n \cdot v_n$

$$\text{Ta có: } u_n = u_1 \cdot q_1^{n-1} \quad v_n = v_1 \cdot q_2^{n-1}$$

$$a_n = u_n \cdot v_n = (u_1 v_1) \cdot (q_1 q_2)^{n-1}$$

vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân với công bội $q = q_1 q_2$.

Bài 5 (trang 107 SGK Đại số 11): Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a. 13^{n-1} chia hết cho 6

b. $3n^3 + 15$ chia hết cho 9

Lời giải:

a. Xét $u_n = 13^n - 1$

ta có: với $n = 1$ thì $u_1 = 13 - 1 = 12$ chia hết 6

giả sử: $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6

$$\text{Ta có: } u_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13 \cdot 13^k - 1 = 13 \cdot 13^k - 13 + 12 = 12(13^k - 1) + 12$$



$$= 13^k(13 - 1) + 13^k - 1$$

$$= 12.13^k + u^k$$

$\Rightarrow u_{k+1}$ là tổng hai số hạng, mỗi số hạng chia hết cho 6.

Vậy u^{k+1} chia hết số 6

Như vậy, mỗi số hạng của dãy số (u_n) đều chia hết cho 6 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b. $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9

$$\text{Đặt } u_n = 3n^3 + 15n$$

+ Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 18$ chia hết 9

+ giả sử với $n = k \geq 1$ ta có:

$u_k = (3k^2 + 15k)$ chia hết 9 (giả thiết quy nạp)

+ Ta chứng minh: u_{k+1} chia hết 9

Thật vậy, ta có:

$$u_{k+1} = 3(k+1)^3 + 15(k+1) = 3(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 15k + 15$$

$$= (3k^3 + 15k) + 9k^2 + 9k + 18 = (3k^3 + 15k) + 9(k^2 + k + 2)$$

$$= u_k + 9(k^2 + k + 2)$$

Theo giả thiết u_k chia hết 9, hơn nữa $9(k^2 + k + 2)$ chia hết 9 $k \geq 1$

Do đó u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy $u_n = 3n^3 + 15n$ chia hết cho 9 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 6 (trang 107 SGK Đại số 11): Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$)

a. Viết năm số hạng đầu của dãy.

b. Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a. 5 số hạng đầu dãy là:



$$u_1 = 2; u_2 = 2u_1 - 1 = 3; u_3 = 2u_2 - 1 = 5;$$

$$u_4 = 2u_3 - 1 = 9 \quad u_5 = 2u_4 - 1 = 17$$

b. Chứng minh: $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp:

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$ (đúng).

Giả sử (u_n) đúng với $n = k \geq 1$

Tức là $u_k = 2^{k-1} + 1$ (1)

Ta phải chứng minh phương trình đã cho đúng với $n = k + 1$ nghĩa là:

$$u_{k+1} = 2^{k+1-1} + 1 = 2^k + 1$$

Theo giả thiết: $u_{k+1} = 2u_k - 1$

$$(1) u_{k+1} = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2 \cdot 2^{k-1} + 2 - 1 = 2^k + 1$$

Biểu thức đã cho đúng với $n = k + 1$, vậy nó đúng với $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 7 (trang 107 SGK Đại số 11): Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số (u_n) , biết:

$$\text{a. } u_n = n + \frac{1}{n} \quad \text{b. } u_n = (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$$

$$\text{c. } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Lời giải:

$$\text{a. } u_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n+1}$$

$$\text{xét: } u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{n+1} - \frac{n^2 + 1}{n} = 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy u_n là dãy tăng.

$$u_n = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

vì là dãy tăng nên $u_1 = 2 < u_2 < u_3 < \dots < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_n > 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

Vì $u_n = n + 1 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (u_n)$ không bị chặn trên. Vậy u_n không bị chặn.



b. Nhận xét: $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow \sin \frac{1}{n} > 0$ nên $\begin{cases} u_n < 0 & (\text{nếu } n \text{ chẵn}) \\ u_n > 0 & (\text{nếu } n \text{ lẻ}) \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 > 0; u_2 > 0; u_3 > 0; u_4 > 0$

Và $u_1 > u_2; u_2 > u_3; u_3 > u_4; \dots$

Vậy dãy số (u_n) không tăng, không giảm $\Rightarrow (u_n)$ không đơn điệu.

$\forall 0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin \frac{1}{n} < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
 $\Leftrightarrow -1 < (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n} < 1 \Leftrightarrow -1 < u_n < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Vậy u_n bị chặn

c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
 $= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số (u_n) giảm

Mặt khác $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1$

Nên dãy số (u_n) bị chặn.

Bài 8 (trang 107 SGK Đại số 11): Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của các cấp số cộng (u_n) , biết:

a. $\begin{cases} 5u_1 + 10u_3 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

Lời giải:

$$\begin{aligned}
\text{a. } \begin{cases} 5u_1 + 10u_2 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 0 \\ 4u_1 + \frac{4 \cdot 3}{2}d = 14 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 15u_1 + 40d = 0 \\ 8u_1 + 12d = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases} \\
\text{b. } \begin{cases} u_7 + u_{13} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, d = 3 \\ u_1 = -12, d = \frac{21}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Bài 9 (trang 107 SGK Đại số 11): Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân (u_n) , biết:

$$\begin{aligned}
\text{a) } &\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \\
\text{b) } &\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \\
\text{c) } &\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}
\end{aligned}$$

Lời giải:

Dùng công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n > 2$

a)

$$\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^5 = 192(1) \\ u_1 \cdot q^6 = 384(2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia (1) theo vế với vế ta được: $q = 2$ thế vào (1):

$$(1) \Leftrightarrow u_1 \cdot 2^5 = 192 \Leftrightarrow u_1 = 6$$

Vậy $u_1 = 6$ và $q = 2$.

b) Ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q(q^2 - 1) = 72(1) \\ u_1 \cdot q^2(q^2 - 1) = 144(2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia (1) theo vế với vế ta được: $q = 2$ thế vào (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2u_1(4 - 1) = 72 \Leftrightarrow u_1 = 12$$

Vậy $u_1 = 12$ và $q = 2$

c) Ta có:

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^3 = 10 \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^5 - u_1 \cdot q^4 = 20 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(1 + q^3 - q^2) = 10(1) \\ u_1 q^2(1 + q^3 - q^2) = 20(2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia (1) theo vế với vế ta được: $q = 2$ thế vào (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2u_1(1 + 8 - 4) = 10 \Leftrightarrow u_1 = 1$$

Vậy $u_1 = 1$ và $q = 2$

Bài 10 (trang 108 SGK Đại số 11): Tứ giác ABCD có số đo của các góc lập thành một cấp số cộng theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp 4 lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

Lời giải:

Kí hiệu: $\angle$: góc

Các góc của tứ giác là $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ($\angle A > 0$) tạo thành cấp số cộng:

Vậy $\angle B = \angle A + d, \angle C = \angle A + 2d, \angle D = \angle A + 3d$.

Theo giả thiết ta có: $\angle C = 5\angle A \Rightarrow \angle A + 2d = 5\angle A \Leftrightarrow 2d = 4\angle A$

Mặt khác $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

$$\Rightarrow \angle A + \angle A + d + \angle A + 2d + \angle A + 3d = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4\angle A + 12\angle A = 360^\circ \Leftrightarrow 16\angle A = 360^\circ \Leftrightarrow \angle A = 22^\circ 30', d = 45^\circ$$

Vậy $\angle B = 67^\circ 30'; \angle C = 112^\circ 30'; \angle D = 157^\circ 30'$

Bài 11 (trang 108 SGK Đại số 11): Biết rằng ba x, y, z lập thành một cấp số nhân và ba số $x, 2y, 3z$ lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

Lời giải:

Cấp số nhân (un) có công bội q có thể viết dưới dạng:

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \dots, u_1q^{n-1}$$

vì x, y, z lập thành cấp số nhân nên: $y = x.q, z = x.q^2$ (1)

Mặt khác $x, 2y, 3z$ lập thành cấp số cộng nên $(x+3z)/2 = 2y$ (2)

Thay (1) và (2) ta được: $\frac{x + 3(x.q^2)}{2} = 2.x.q$

$$\Leftrightarrow 1 + 3q^2 = 4q \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 12 (trang 108 SGK Đại số 11): Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng một bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là 12.288m^2 . Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải:

Gọi S là diện tích mặt đáy của tháp

$$S = 12.288 \text{ m}^2$$

Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{11}$ là diện tích bề mặt của mỗi tầng.

Diện tích của tầng một bằng nửa diện tích của đáy tháp

$$\Rightarrow S_1 = \frac{S}{2}$$

Mặt khác theo giả thuyết:

$$S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{S}{4}; S_3 = \frac{S_2}{2} = \frac{S}{8}; \dots \Rightarrow S_n = \frac{S}{2^n}$$

Vậy diện tích mặt trên cùng chính là diện tích tầng tháp thứ 11 nên:

$$S_{11} = \frac{S}{2^{11}} = \frac{12.288}{2^{11}} \approx 6(\text{m}^2)$$

Bài 13 (trang 108 SGK Đại số 11): Chứng minh rằng nếu các số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng ($a, b, c \neq 0$) thì các số $1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b)$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

Để chứng minh các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành cấp số cộng ta chứng minh: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$

Ta có: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$
 $\Leftrightarrow (a+c)(a+c+2b) = 2(a+b)(b+c)$
 $\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2 \quad (1)$

Đẳng thức (1) thỏa khi a^2, b^2, c^2 là cấp số cộng.

Vậy $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành cấp số cộng.

Trên đây VnDoc.com đã giới thiệu tới bạn đọc tài liệu: Giải bài tập Toán 11 ôn tập chương 3: Dãy số - Cấp số cộng và cấp số nhân. Để có kết quả cao hơn trong học tập, VnDoc xin giới thiệu tới các bạn học sinh tài liệu [Hóa học lớp 10](#), [Giải bài tập Hóa học lớp 11](#), [Hóa học lớp 12](#), [Thi thpt Quốc gia môn Văn](#), [Thi thpt Quốc gia môn Lịch sử](#), [Thi thpt Quốc gia môn Địa lý](#), [Thi thpt Quốc gia môn Toán](#), [đề thi học kì 1 lớp 11](#), [đề thi học kì 2 lớp 11](#) mà VnDoc tổng hợp và đăng tải.