

Giải bài tập Toán 11 Giải tích: Giới hạn của hàm số

Bài 1 (trang 132 SGK Đại số 11): Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{3x-2}$
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-5x^2}{x^2+3}$

Lời giải:

a. Đặt $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$, TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

Xét dãy số (x_n) , $x_n \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$

Xét giới hạn của dãy số: $(f(x_n))$ nếu có:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n+1}{3x_n-2} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n+1)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (3x_n-2)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 3x_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} 2} = \frac{4+1}{12-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{3x-2} = \frac{1}{2}$$

b. Tương tự a:

Đặt $f(x) = \frac{2-5x^2}{x^2+3}$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Xét dãy số (x_n) , $x_n \in (a; +\infty)$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-5x_n^2}{x_n^2+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 \left(\frac{2}{x_n^2} - 5 \right)}{x_n^2 \left(1 + \frac{3}{x_n^2} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{x_n^2} - 5 \right)}{\left(1 + \frac{3}{x_n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x_n^2} - 5 \right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x_n^2} \right)} = \frac{\frac{2}{+\infty} - 5}{1 + \frac{3}{+\infty}} = -5$$

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-5x^2}{x^2+3} = -5$$

Bài 2 (trang 132 SGK Đại số 11):

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & (\text{nếu } x \geq 0) \\ 2x & (\text{nếu } x < 0) \end{cases}$

và các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ với $v_n = -\frac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim f(u_n)$, $\lim f(v_n)$.

Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số đã cho khi $x \rightarrow 0$?



Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\forall \varepsilon: \frac{1}{n} > 0 \text{ nên } f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{1}{n}} + 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + 1 \right) =$$

$$\text{Và } -\frac{1}{n} < 0 \text{ nên:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \text{ và}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$$

Bài 3 (trang 132 SGK Đại số 11): Tính các giới hạn sau:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$$

Lời giải:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-3)^2 - 1}{-3 + 1} = \frac{9 - 1}{-2} = -4$$

$$\text{b. Đặt } f(x) = \frac{4 - x^2}{x + 2}, \text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x + 2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 2} = 2 - x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x) = 2 + 2 = 4$$

c. Với $\forall x \neq 6$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} &= \frac{(\sqrt{x+3} - 3)(\sqrt{x+3} + 3)}{(x - 6)(\sqrt{x+3} + 3)} \\ &= \frac{(x+3) - 3^2}{(x - 6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{(x+3) - 3^2}{(x - 6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 3} = \frac{1}{\sqrt{6+3} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{6}{x}\right)}{x\left(\frac{4}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{6}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = -2$$



$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1} = \frac{\lim 17}{\lim (x^2 + 1)} = 0$$

$$\begin{aligned} f. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(\frac{3}{x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{3}{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{3}{x} + 1} = +\infty \cdot (-2) = -\infty \end{aligned}$$

Bài 4 (trang 132 SGK Đại số 11): Tìm các giới hạn sau:

$$a. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{(x - 2)^2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7}{x - 1}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1}$$

Lời giải:

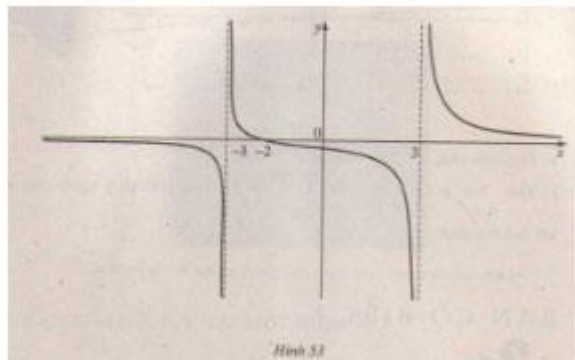
$$a. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{(x - 2)^2} = \frac{3 \cdot 2 - 5}{(2 - 2)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7}{x - 1} = \frac{-5}{0} = +\infty \text{ (vì khi } x \rightarrow 1 \text{ thì } x - 1 < 0)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1} = -\frac{5}{0} = -\infty \text{ (vì } x \rightarrow 1^+ \text{ thì } x - 1 > 0)$$

Bài 5 (trang 133 SGK Đại số 11): Cho hàm số $f(x) = \dots$

Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ có đồ thị như trên hình dưới:



a. Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về giá trị hàm số cho khi:

$x \rightarrow -\infty, x \rightarrow 3^-, x \rightarrow 3^+$

b. Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$;
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$;
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$.

Lời giải:

a) Từ đồ thị thấy:

- $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow 3^-$;
- $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow 3^+$

$$\begin{aligned} \text{b.) Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x^2-9} \left(= \frac{3+2}{3^2-9} \right) = -\infty$$

(vì trên $(-3; 3)$ thì $x^2 - 9 < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{-3+2}{(-3)^2-9} = +\infty \left(= -\frac{1}{0} \right)$$

(vì trên đoạn $(-3; 3)$, $x^2 - 9 < 0$).

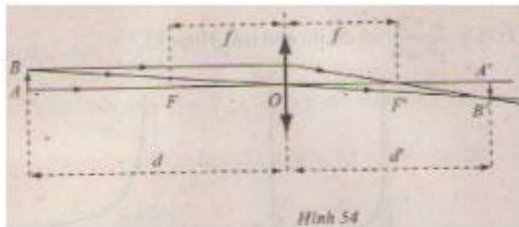
Bài 6 (trang 133 SGK Đại số 11): Tính:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}$

Lời giải:

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right) = -\infty(-2) = +\infty$
- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$
- d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + x}{x \left(\frac{5}{x} - 2\right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{x \left(\frac{5}{x} - 2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}{\frac{5}{x} - 2} = \frac{2}{-2} = -1.$

Bài 7 (trang 133 SGK Đại số 11): Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính (hình dưới).



- a. Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.
- b. Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow +\infty} \varphi(d)$.
- Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải:

a. Ta có: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d'} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f} = g(d)$

b. Tính:

$$\lim_{d \rightarrow f^+} g(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = \frac{f^2}{0} = +\infty$$

(vì $d - f > 0$ khi $d \rightarrow f^+$)

- Ý nghĩa: Khi vật dần đến tiêu điểm nhưng lớn hơn tiêu điểm thì có ảnh ở ∞ .

$$\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{f}{d-f} = -\infty$$

- (vì $d - f < 0$ khi $d \rightarrow f^-$)

- Ý nghĩa: khi vật dần đến tiêu điểm nhưng lớn hơn tiêu điểm thì ảnh ở ∞ .

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{f}{d-f} = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{d}} = f$$

Ý nghĩa: khi vật xa vô cực thì khoảng cách từ ảnh đến quang tâm bằng tiêu cự.