III. CÁC DẠNG NGUYÊN HÀM LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Dạng 1. *Nguyên hàm dùng công thức lượng giác thuần túy*

Dạng 2. *Nguyên hàm lượng giác của các hàm chỉ có sin, cosin*

Ví dụ 1: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_4=\int \sin^3 x\,dx$ **b)** $I_5=\int \cos^5 x\,dx$ **c)** $I_3=\int \cos^4 x\,dx$

Hướng dẫn giải:

a) $I_4=\int \sin^3 x\,dx=\int \sin^2 x.\sin x\,dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C.$

b) $I_5=\int \cos^5 x\,dx=\int \cos^4 x.\cos x\,dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^2 d\left(\sin x\right)=\int\left(1-2\sin x+\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=$

$=\sin x-\sin^2 x+\dfrac{\sin^3 x}{3}+C\longrightarrow I_5=\sin x-\sin^2 x+\dfrac{\sin^3 x}{3}+C.$

c) Sử dụng liên tiếp công thức hạ bậc hai ta được:

$$\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

Khi đó $I_3=\int \cos^4 x\,dx=\int\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\dfrac{3x}{8}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C.$

Ví dụ 2: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+3\sin x+2}$ **b)** $I_2=\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

c) $I_3=\int \dfrac{dx}{\sin 3x+\sin x}$ **d)** $I_4=\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $I_1=\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+3\sin x+2}=\int \dfrac{d(\sin x)}{\sin^2 x+3\sin x+2}$

Đặt $t=\sin x\longrightarrow I_1=\int \dfrac{dt}{t^2+3t+2}=\int \dfrac{(t+2)-(t+1)}{(t+1)(t+2)}dt=\int \dfrac{dt}{t+1}-\int \dfrac{dt}{t+2}=\ln\left|\dfrac{t+1}{t+2}\right|+C=\ln\left|\dfrac{\sin x+1}{\sin x+2}\right|+C.$

b) $I_2=\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int \dfrac{\sin^2 x.\cos x\,dx}{\cos^2 x}=-\int \dfrac{\sin^2 x\,d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\int \dfrac{\sin^2 x\,d(\sin x)}{\sin^2 x-1}$

Đặt $t=\sin x\longrightarrow I_2=\int \dfrac{t^2dt}{t^2-1}=\int \dfrac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\left(1+\dfrac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\int \dfrac{dt}{t^2-1}=t+\dfrac{1}{2}\int \dfrac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt=$

$=t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C=\sin x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C\longrightarrow I_2=\sin x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$

c) $I_3=\int \dfrac{dx}{\sin 3x+\sin x}=\int \dfrac{dx}{2\sin 2x.\cos x}=\int \dfrac{dx}{4\sin x.\cos^2 x}=\dfrac{1}{4}\int \dfrac{\sin x\,dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=-\dfrac{1}{4}\int \dfrac{d(\cos x)}{\left(1-\cos^2 x\right).\cos^2 x}$

Đặt $\cos x=t\longrightarrow I_3=-\dfrac{1}{4}\int \dfrac{dt}{\left(1-t^2\right).t^2}=-\dfrac{1}{4}\int \dfrac{\left(1-t^2\right)+t^2}{\left(1-t^2\right).t^2}dt=-\dfrac{1}{4}\left[\int \dfrac{dt}{t^2}+\int \dfrac{dt}{1-t^2}\right]$

Mà $\begin{cases}\displaystyle\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C_1\\ \displaystyle\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt=\frac{1}{2}\left[\int \frac{dt}{1+t}+\int \frac{dt}{1-t}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C_2\end{cases}\longrightarrow I_3=-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|\right)+C.$

Thay t = cos$x$ vào ta được $I_3=-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\right)+C.$

d) $I_4=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x}=-\int\frac{d(\sin x)}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}$

Đặt $t=\sin x\longrightarrow I_4=-\displaystyle\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=-\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}=\int\left[\frac{(t+1)-(t-1)}{2(t+1)(t-1)}\right]^2dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)^2dt=$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{2dt}{(t-1)(t+1)}\right]=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\int\frac{(t+1)-(t-1)\,dt}{(t-1)(t+1)}\right]=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C.$$

Thay t = sin$x$ vào ta được $I_4=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{\sin x-1}-\dfrac{1}{\sin x+1}+\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right)+C.$

Ví dụ 3: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_5=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$ **b)** $I_6=\displaystyle\int\frac{4\sin^3 x\,dx}{1+\cos x}$ **c)** $I_7=\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x-1}$

Hướng dẫn giải:

a) $I_5=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}$

Đặt $t=\sin x\longrightarrow I_5=\displaystyle\int\frac{dt}{t\left(1-t^2\right)}=\int\frac{t^2+\left(1-t^2\right)}{t\left(1-t^2\right)}dt=\int\frac{t\,dt}{1-t^2}+\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-t^2\right)}{1-t^2}+\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|+\ln|t|+C.$

Thay t = sin$x$ vào ta được $I_5=-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-\sin^2 x\right|+\ln|\sin x|+C=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\cos^2 x\right|+\ln|\sin x|+C=\ln|\tan x|+C.$

Vậy $I_5=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\ln|\tan x|+C.$

b) Sử dụng phép biến đổi lượng giác ta có:

$$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}=\frac{4\sin^2 x.\sin x}{1+\cos x}=\frac{4\left(1-\cos^2 x\right).\sin x}{1+\cos x}=4(1-\cos x).\sin x=4\sin x-2\sin 2x.$$

Từ đó $I_6=\displaystyle\int\frac{4\sin^3 x\,dx}{1+\cos x}=\int(4\sin x-2\sin 2x)\,dx=-4\cos x+\cos 2x+C\longrightarrow I_6=-4\cos x+\cos 2x+C.$

c) $I_7=\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x-1}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x-1}$

Đặt t = cos$x$ ta được $I_7=-\displaystyle\int\frac{dt}{t^3-1}=-\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}$

Bằng kĩ thuật phân tích nhảy tầng lầu ta được $\dfrac{1}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\dfrac{3t^2-3\left(t^2+t+1\right)+3(t-1)}{-6(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$

Khi đó $I_7=\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\frac{3t^2-3\left(t^2+t+1\right)+3(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}dt=\frac{1}{6}\int\frac{3t^2dt}{t^3-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}$

- $\displaystyle\int\frac{3t^2dt}{t^3-1}=\int\frac{d\left(t^3-1\right)}{t^3-1}=\ln\left|t^3-1\right|+C_1$
- $\dfrac{dt}{t-1}=\ln|t-1|+C_2$
- $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C_3=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C_3$

Từ đó $I_7=\dfrac{1}{6}\ln\left|t^3-1\right|-\dfrac{1}{2}\ln|t-1|+\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C=\dfrac{1}{6}\ln\left|t^3-1\right|-\dfrac{1}{2}\ln|t-1|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

Bình luận:

Ngoài cách sử dụng kĩ thuật nhảy tầng lầu trực tiếp như trên, chúng ta có thể biến đổi theo hướng khác như sau

$$I_7=-\int\frac{dt}{t^3-1}=-\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}=-\int\frac{d(t-1)}{(t-1)\left[(t-1)^2+3(t-1)+3\right]}=-\int\frac{du}{u\left(u^2+3u+3\right)}$$

$$\longrightarrow\frac{-1}{u\left(u^2+3u+3\right)}=\frac{-1}{u^3+3u^2+3u}=\frac{1}{6}.\frac{\left(3u^2+6u+3\right)-3\left(u^2+3u+3\right)+3u}{u\left(u^2+3u+3\right)}=\frac{1}{6}.\frac{3u^2+6u}{u^3+3u^2+3u}-\frac{1}{2u}+\frac{1}{2\left(u^2+3u+3\right)}$$

Thay vào ta được :

$$I_7=\frac{1}{6}ln\left|u^3+3u^2+3u\right|-\frac{1}{2}ln\left|u\right|+\frac{1}{2}\int\frac{du}{\left(u+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{6}ln\left|u^3+3u^2+3u\right|-\frac{1}{2}ln\left|u\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2u+3}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Ví dụ 4: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int\cos^6 x\,dx$

b) $I_2=\int\frac{dx}{\sin^2 x.\cos x}$

c) $I_3=\int\sin 2x(2+\sin^2 xdx$

d) $I_4=\int\frac{\sin 4xdx}{2\cos 4x-1}$

Ví dụ 5: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int\frac{dx}{\sin^3 x}$

b) $I_2=\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^5 x}$

c) $I_3=\int\sin x\cos 2x\,dx$

d) $I_4=\int\frac{dx}{\sin x\cos^6 x}$

Ví dụ 6: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

b) $I_2=\int\frac{\sin 2x.\cos x}{3+\cos x}dx$

c) $I_3=\int\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$

d) $I_4=\int\frac{\cos x}{2+\cos 2x}dx$

Ví dụ 7: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int\cos^2 x.\cos 4xdx$

b) $I_2=\int\sqrt{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x\,dx$

c) $I_3=\int\sin x.\cos x(1+\cos x)^2\,dx$

d) $I_4=\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx$

Ví dụ 8: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I_1=\int\cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$

b) $I_2=\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

c) $I_3=\int(\sin^3 x+\cos^3 x)dx$