

# CHUYÊN ĐỀ RÚT GỌN TÍNH TOÁN

## LUYỆN THI CHUYÊN

**Câu 1.** Rút gọn  $P = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

**Câu 2.** Thực hiện phép tính:

a)  $A = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} + 4}{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} + 2 - \sqrt{2}}$

b)  $B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

c) Tính giá trị  $B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}$

**Câu 3.** Rút gọn biểu thức :

$$P = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2001} + \sqrt{2005}}$$

**Câu 4.** Tính giá trị của tổng

$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

**Câu 5.** (Chuyên ĐHSPT 2009 VI) Các số thực  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức :

$$\left( x + \sqrt{1 + x^2} \right) \left( y + \sqrt{1 + y^2} \right) = 1. \text{ Chứng minh } x + y = 0$$

**Câu 6.** (Chuyên ĐHSPT 2011 V2) Cho  $a = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$

1. Chứng minh rằng  $4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$

2. Tính giá trị của biểu thức  $S = a^2 + \sqrt{a^4 + a} + 1$

**Câu 7.** (Chuyên ĐHSPT 2011 VI) Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$$

**Câu 8.** Tính giá trị biểu thức:

$$A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{2006} \text{ với } x = \frac{\sqrt[3]{(17\sqrt{5}) - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}} (\sqrt{5} + 2)$$

**Câu 9.** (Chuyên ĐHSPT 2009 V2) Các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $xy \neq \sqrt{2}$  và  $xy \neq -\sqrt{2}$ . Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x, y$

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

**Câu 10.** (Chuyên ĐHSPT 2014 VI) Cho các số thực dương  $a, b$ ;  $a \neq b$ . Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b - a} = 0$$

**Câu 11.** Rút gọn biểu thức:  $A = \sqrt[3]{a^3 + a + \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}} + \sqrt[3]{a^3 + a - \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}}$ .

**Câu 12.** Trục căn thức ở mẫu số của biểu thức:  $A = \frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}$ .

**Câu 13.** Tính  $A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}$

**Câu 14.** Có số  $y$  nào biểu thị trong dạng sau không?

$$y = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \dots}}}}}$$

**Câu 15.** (Chuyên ngữ 2006) Cho biểu thức

$$P = \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} \right) - 1$$

a/ Tìm  $x$  để  $P$  có nghĩa, rút gọn  $P$

b/ Tìm các giá trị  $x$  nguyên để  $Q = P - \sqrt{x}$  nguyên

**Câu 16.** (Chuyên ngữ 2007) Cho biểu thức :

$$P = \left( \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1-x + \sqrt{1-x}} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1+x - \sqrt{1+x}} \right)^2 \cdot \left( \frac{x^2 - 1}{2} \right) + 1$$

a) Tìm điều kiện của  $x$  để  $P$  có nghĩa và rút gọn  $P$

b) Tìm  $x$  để  $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Câu 17** (Chuyên ngữ 2008) Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

Chứng minh rằng  $P$  luôn nhận giá trị nguyên với mọi  $x, y$  thỏa mãn  $x, y > 0, x \neq y$

**Câu 18.** (Chuyên ngữ 2008). Cho biểu thức

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 8; x \neq -8; x \neq 0)$$

**Câu 19** (Chuyên ngữ 2011). Cho biểu thức

$$A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y}}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm x ; y biết  $xy = \frac{1}{36}$ ;  $A = 5$

**Câu 20** (Chuyên ĐHSP 2012 VI). Cho biểu thức :

$$P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{với } a>b>0$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Biết  $a-b=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Câu 21.** Cho biểu thức  $(x + \sqrt{x^2 + 2006})(y + \sqrt{y^2 + 2006}) = 2006$

Hãy tính tổng:  $S = x + y$

**Câu 22.** Cho  $M = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2008} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2008}$

a) Chứng minh rằng M có giá trị nguyên.

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

**Câu 23.** (HSG Bắc Giang 2013)

1) Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ .

2) Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{a-2}+2}{3} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left( \frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right)$ .

**Câu 24.** (Chuyên ĐHSP 2007 VI) Cho  $a>2$  chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^2 - 3a - (a-1)\sqrt{a^2-4} + 2}{a^2 + 3a - (a+1)\sqrt{a^2-4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} = \frac{1-a}{1+a}$$

**Câu 25.** (Chuyên ĐHSP 2007 V2) Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}; Q = x^4 - 7x^2 + 15 \quad (\text{Với } x>0, x \neq 1)$$

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì  $Q-4P$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Câu 26.** (Chuyên ĐHSP 2008 VI) Cho biểu thức

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{a-\sqrt{ab}} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2} \quad \text{Với } a=0; b>0 \text{ và } a \text{ khác } b$$

a) Rút gọn P

b) Tìm a, b sao cho  $b=(a+1)^2$  và  $P=-1$

**Câu 27** (Chuyên ĐHSPT 2008 V2) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn :

$$b \neq c, \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}, a+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$$

Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

**Câu 28.** (Chuyên ĐHSPT 2009 VI) Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{a^4 + 16a^2 + 64}}$$

$$B = a^4 + 20a^3 + 102a^2 + 40a + 200$$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để  $A+B=0$

**Câu 29.** (Chuyên ngữ 2010) Cho biểu thức:

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị x để  $P = -\frac{4}{3}$

**Câu 30.** (Chuyên ĐHSPT 2013 VI). Cho biểu thức

$$Q = \frac{\left( \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} \quad \text{với } a>0; b>0 \text{ và } a \neq b.$$

Chứng minh rằng giá trị biểu thức Q không phụ thuộc vào a, b

## LUYỆN THI CHUYÊN

**Câu 1.** Rút gọn  $P = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

**Câu 2.** Thực hiện phép tính:

b)  $A = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} + 4}{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} + 2 - \sqrt{2}}$

b)  $B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

c) Tính giá trị  $B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}$

a) Tính:

$$\left[ \sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} \right] \left[ \sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} + \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} \right] =$$

$$= \left[ \sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} \right]^2 - (10 - 4\sqrt{2}) = 0$$

Mặt khác ta luôn có:  $\sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} + \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} > 0$

Vậy:  $\sqrt{5 + \sqrt{17}} - \sqrt{5 - \sqrt{17}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{2}} = 0$

Tương tự chứng minh

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{2} = 2$$

b)  $B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

- Biến đổi  $2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}$

- Tương tự  $2 - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$

Vậy  $B = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$

Vậy  $B = \sqrt{2}$

c) Tính giá trị  $B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}$

Biểu thức  $B = \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009}$  có giá trị là một số tự nhiên (1 điểm).

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } B &= \sqrt{1 + 2008^2 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009} = \sqrt{(1 + 2008)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2008 + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009} \\ &= \sqrt{(2009)^2 - 2 \cdot 2009 \cdot \frac{2008}{2009} + \frac{2008^2}{2009^2}} + \frac{2008}{2009} = \sqrt{\left(2009 - \frac{2008}{2009}\right)^2} + \frac{2008}{2009} \\ &= \left|2009 - \frac{2008}{2009}\right| + \frac{2008}{2009} = 2009 - \frac{2008}{2009} + \frac{2008}{2009} = 2009. \end{aligned}$$

**Câu 3.** Rút gọn biểu thức :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2001} + \sqrt{2005}} \\ P &= \frac{1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2001}} = \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{(\sqrt{9} - \sqrt{5})(\sqrt{9} + \sqrt{5})} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{(\sqrt{13} - \sqrt{9})(\sqrt{13} + \sqrt{9})} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\sqrt{2005} - \sqrt{2001}}{(\sqrt{2005} - \sqrt{2001})(\sqrt{2005} + \sqrt{2001})} = \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{2005} - \sqrt{2001}}{4} = \frac{\sqrt{2005} - 1}{4} \\ \text{Vậy } P &= \frac{\sqrt{2005} - 1}{4} \end{aligned}$$

**Câu 4.** Tính giá trị của tổng

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Xét  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} \quad a > 0$

$$\begin{aligned} \text{ta có} \quad A^2 &= 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 + a^2}{a^2(a+1)^2} \\ &= \frac{a^4 + 2a^2(a+1) + (a+1)^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{(a^2 + a + 1)^2}{a^2(a+1)^2} \end{aligned}$$

Vì  $a > 0, A > 0$  nên  $A = \frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

Áp dụng ta có

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

$$= (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}) = 100 - \frac{1}{100} = 99,99$$

**Câu 5.** (Chuyên ĐHSPT 2009 VI) Các số thực  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức :

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1. \text{ Chứng minh } x+y=0$$

Ta có :

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2})(x - \sqrt{1+x^2}) = (x - \sqrt{1+x^2})$$

$$\Leftrightarrow -(y + \sqrt{1+y^2}) = (x - \sqrt{1+x^2}) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } -(x + \sqrt{1+x^2}) = (y - \sqrt{1+y^2}) \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) Ta có

$$-y - \sqrt{1+y^2} - x - \sqrt{1+x^2} = x - \sqrt{1+x^2} + y - \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow -y - x = x + y \Leftrightarrow x + y = 0$$

**Câu 6.** (Chuyên ĐHSPT 2011 V2) Cho  $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$

1. Chứng minh rằng  $4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$

2. Tính giá trị của biểu thức  $S = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow a + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} \Leftrightarrow \left(a + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow a^2 + \frac{2\sqrt{2}a}{4} + \frac{1}{32} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{32} \Leftrightarrow 4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$$

2. Theo phần 1

$$4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} \Rightarrow a^4 = \frac{a^2 - 2a + 1}{8}$$

$$\Rightarrow a^4 + a + 1 = \frac{a^2 - 2a + 1}{8} + a + 1 = \left(\frac{a+3}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

**Câu 7.** (Chuyên ĐHSPT 2011 VI) Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$$

$$2A = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$$

$$2A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

$$2A > \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{(\sqrt{81}+\sqrt{80})(\sqrt{81}-\sqrt{80})}$$

$$2A > \sqrt{2}-\sqrt{1} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{81}-\sqrt{80} = \sqrt{81}-1 = 8$$

$$\Rightarrow A > 4 \text{ (đpcm)}$$

**Câu 8.** Tính giá trị biểu thức:

$$A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{2006} \quad \text{với} \quad x = \frac{\sqrt[3]{(17\sqrt{5})-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}} (\sqrt{5}+2)$$

$$\text{Rút gọn } \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt{5}-2, \sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}$$

$$\text{Khi đó : } x = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-3+\sqrt{5}} (\sqrt{5}+2) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Nên : } 3x^3 + 8x^2 + 2 = 3 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3$$

$$\Rightarrow A = 3^{2006}$$

**Câu 9.** (Chuyên ĐHSPT 2009 V2) Các số thực x, y thỏa mãn  $xy \neq \sqrt{2}$  và  $xy \neq -\sqrt{2}$ . Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

**Hướng dẫn**

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

$$P = \left( \frac{2\sqrt[3]{2}xy}{(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2(xy + \sqrt[3]{2})} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}$$

$$P = \frac{4\sqrt[3]{2}xy + x^2y^2 - 2\sqrt[3]{2}xy + \sqrt[3]{4}}{2(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = \frac{(xy + \sqrt[3]{2})^2}{(xy + \sqrt[3]{2})(xy - \sqrt[3]{2})} \cdot \frac{xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = 0$$

**Câu 10.** (Chuyên ĐHSPT 2014 VI) Cho các số thực dương a, b ;  $a \neq b$ . Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0$$

$$Q = \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a}$$

$$Q = \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$Q = \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$Q = \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} = 0(DPCM)$$

**Câu 11.** Rút gọn biểu thức:  $A = \sqrt[3]{a^3 + a + \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}} + \sqrt[3]{a^3 + a - \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}}$ .

**C1:** Đặt  $u = \sqrt[3]{a^3 + a + \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}}$ ;  $v = \sqrt[3]{a^3 + a - \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}}$   $\Rightarrow A = u + v$ ;

$$u^3 + v^3 = 2a^3 + 2a; \quad u.v = a^2 - \frac{1}{3}. \quad \text{Mà } A^3 = (u + v)^3 \Rightarrow A^3 = u^3 + v^3 + 3u.v(u+v)$$

$$\Rightarrow A^3 = 2a^3 + 2a + 3(a^2 - \frac{1}{3})A \Rightarrow A^3 - (3a^2 - 1)A - 2a^3 - 2a = 0$$

$$\Rightarrow (A - 2a)(A^2 + 2a.A + a^2 + 1) = 0 \text{ Do: } A^2 + 2a.A + a^2 + 1 = (A + a)^2 + 1 > 0 \text{ nên}$$

$$A = 2a$$

**C2:** phân tích các biểu thức trong căn thức thành hằng đẳng thức.

**Câu 12.** Trục căn thức ở mẫu số của biểu thức:  $A = \frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}$ .

Áp dụng hằng đẳng thức:  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ . Ta coi mẫu số của A có dạng  $a + b + c$ . Khi đó nhân tử số và mẫu số của A với  $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ , ta có:

$$A = \frac{1^2 + (3\sqrt[3]{2})^2 + (-2\sqrt[3]{4})^2 - 1.3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}(-2\sqrt[3]{4}) - (-2\sqrt[3]{4}).1}{1^3 + (3\sqrt[3]{2})^3 - (2\sqrt[3]{4})^3 - 3.1.3\sqrt[3]{2}(-2\sqrt[3]{4})} = \frac{13 + 11\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2}}{59}$$

**Câu 13.** Tính  $A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}$

$$\text{Ta có } A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{4} + 4\sqrt{3} + 3}}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10(2 + \sqrt{3})}}$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Vậy } A = 3$$

**Câu 14.** Có số y nào biểu thị trong dạng sau không?

$$y = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \dots}}}}}$$

Để thấy  $y > \sqrt{5}$

Bình phương 2 vế ta có:

$$y^2 = 5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \dots}}}}$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 5)^2 = 13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \dots}}} \quad \text{-----}$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 5)^2 = 13 + y$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 10y^2 - y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)(y^3 + 3y^2 - y - 4) = 0 \quad \text{-----}$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)[(y + 3)(y + 1)(y - 1) - 1] = 0(*) \quad \text{-----}$$

Vì  $y > \sqrt{5}$  nên  $(y + 3)(y + 1)(y - 1) - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

**Câu 15.** (Chuyên ngữ 2006) Cho biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$$

a/ Tìm x để P có nghĩa, rút gọn P

b/ Tìm các giá trị x nguyên để  $Q = P - \sqrt{x}$  nguyên

\*P có nghĩa khi  $x \geq 0; x \neq 1$ ; Rút gọn P:

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1$$

$$P = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1}\right) : \left(\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - 1$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{(x+1)} - 1 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1}$$

b/ Tìm các giá trị x nguyên để  $Q = P - \sqrt{x}$  nguyên

$$Q = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = \frac{x+2-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+3}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

$Q \in \mathbb{Z}$  khi  $\sqrt{x}-1 \in U(3) = \pm 1; \pm 3 \Rightarrow x \in \{0; 4; 16\}$  thì  $Q \in \mathbb{Z}$

**Câu 16.** (Chuyên ngữ 2007) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{1-x + \sqrt{1-x}} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1+x - \sqrt{1+x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{2}\right) + 1$$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P

b) Tìm x để  $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Giải**

1) P có nghĩa khi

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x+\sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1+x-\sqrt{1+x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ x \neq 0, x \neq 1 \\ x \neq 0, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0, \text{ và } 0 < x < 1 \text{ Thì P có nghĩa}$$

Rút gọn P

$$P = \left[ \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} + \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}-1)} \right]^2 \cdot \left( \frac{x^2-1}{2} \right) + 1$$

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^2 \cdot \left[ \frac{(1+x)(1-x)}{-2} \right] + 1$$

$$P = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{-2} + 1$$

$$P = \frac{1+x+1-x-2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{-2} + 1$$

$$P = \frac{2-\sqrt{1-x^2}-2}{-2} = \sqrt{1-x^2}$$

Vậy với  $-1 < x < 0$  và  $0 < x < 1$  thì  $P = \sqrt{1-x^2}$

2)

$$P \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện  $-1 < x < 0$  và  $0 < x < 1$  ta có

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1 \\ -1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ Thì } P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 17** (Chuyên ngữ 2008) Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

Chứng minh rằng P luôn nhận giá trị nguyên với mọi x,y thoả mãn  $x,y > 0, x \neq y$

**Giải**

Rút gọn P

$$P = \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3 y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \left( \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(x-y)} + \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(x-y)} \right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$P = \frac{2(x+y)}{x-y} \cdot \frac{x}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = 2$$

**Câu 18.** (Chuyên ngữ 2008). Cho biểu thức

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 8; x \neq -8; x \neq 0)$$

Chứng minh A không phụ thuộc biến số

$$A = \frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( \frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)}$$

$$A = \frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} + \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)}$$

$$A = 2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \notin x$$

**Câu 19** (Chuyên ngữ 2011). Cho biểu thức

$$A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y}}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm x ; y biết  $xy = \frac{1}{36}; A = 5$

1)

$$A = \left[ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy} \right] : \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

2)  $A = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}$  theo GT  $\sqrt{xy} = \frac{1}{6}$

theo Viet đảo  $\sqrt{x}; \sqrt{y}$  là nghiệm dương của phương trình bậc 2

$$t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 5t + 1 = 0 \quad \Delta = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{1}{3}$$

vậy  $(x; y) = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right); \left( \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right)$

**Câu 20** (Chuyên ĐHSPT 2012 VI). Cho biểu thức :

$$P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a + b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a > b > 0$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Biết  $a-b=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của P

$$a) P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$P = \frac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) + \sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{a+b-a+b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$P = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a^2+b^2}{b}$$

b) Thay  $a=b+1$  ta có

$$P = \frac{(b+1)^2 + b^2}{b} = \frac{2b^2 + 2b + 1}{b} = \left( 2b + \frac{1}{b} \right) + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$$

$$\text{Min}(P) = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

**Câu 21.** Cho biểu thức  $(x + \sqrt{x^2 + 2006})(y + \sqrt{y^2 + 2006}) = 2006$

Hãy tính tổng:  $S = x + y$

Ta có:

$$\begin{aligned} & (x - \sqrt{x^2 + 2006})(y - \sqrt{y^2 + 2006})(x + \sqrt{x^2 + 2006})(y + \sqrt{y^2 + 2006}) \\ &= 2006(x - \sqrt{x^2 + 2006})(y - \sqrt{y^2 + 2006}) \Leftrightarrow 2006 = (x - \sqrt{x^2 + 2006})(y - \sqrt{y^2 + 2006}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (x + \sqrt{x^2 + 2006})(y + \sqrt{y^2 + 2006}) = (x - \sqrt{x^2 + 2006})(y - \sqrt{y^2 + 2006})$$

$$x\sqrt{y^2 + 2006} = -y\sqrt{x^2 + 2006} \quad (*)$$

$$\text{Nếu } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S = 0$$

$$\text{Nếu } x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \text{ từ } (*) \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 2006}}{\sqrt{y^2 + 2006}} = -\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow xy < 0$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2 + 2006}{y^2 + 2006} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow 2006x^2 = 2006y^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left. \begin{aligned} (x-y)(x+y) &= 0 \\ \text{mà } xy < 0 &\Rightarrow x - y \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = x + y = 0 \end{aligned}$$

**Câu 22.** Cho  $M = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2008} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2008}$

a) Chứng minh rằng M có giá trị nguyên.

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

a) Chứng minh giá trị của M là một số nguyên.

$$\text{Biến đổi } M = (5 + 2\sqrt{6})^{1004} + (5 - 2\sqrt{6})^{1004}.$$

$$\text{Đặt } a = 5 + 2\sqrt{6}; \quad b = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow a + b = 10 \text{ và } a.b = 1.$$

$$\text{Đặt } U_n = a^n + b^n \text{ với } n \in \mathbb{N}. \text{ Khi đó } M = U_{1004}$$

$$\text{Ta có } U_{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} = a.a^{n+1} + b.b^{n+1} = (10-b)a^{n+1} + (10-a)b^{n+1}$$

$$= 10(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n) = 10U_{n+1} - U_n \text{ (vì } ab = 1).$$

$$\Rightarrow U_{n+2} = 10U_{n+1} - U_n \text{ (*)}.$$

$$\text{Ta thấy } U_0 = 2 \in \mathbb{Z}; \quad U_1 = a + b = 10 \in \mathbb{Z}.$$

$$U_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 10^2 - 2.1 = 98 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Theo công thức (*) thì } U_3 = 10U_2 - U_1 \text{ mà } U_1, U_2 \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } U_3 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Lại theo (*) } U_4 = 10U_3 - U_2 \text{ cũng có giá trị nguyên.}$$

$$\text{Quá trình trên lặp đi lặp lại vô hạn suy ra } U_n \text{ có giá trị nguyên với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Suy ra } M = U_{1004} \text{ có giá trị là một số nguyên.}$$

a) Tìm chữ số tận cùng của M. (0.5 điểm)

$$\text{Từ (*) suy ra } U_{n+2} + U_n = 10U_{n+1} : 10$$

$$\Rightarrow U_{n+4} - U_n = (U_{n+4} + U_{n+2}) - (U_{n+2} + U_n) : 10 \Rightarrow (U_{n+4} - U_n) : 10 \Rightarrow U_{4k+r} \text{ và } U_r$$

có chữ số tận cùng giống nhau.

$$1004 = 4.251 \text{ suy ra } U_{1004} \text{ và } U_0 \text{ có chữ số tận cùng giống nhau.}$$

$$\text{Mà } U_0 \text{ có chữ số tận cùng là 2 (theo c/m câu a) nên } M \text{ có chữ số tận cùng bằng 2.}$$

**Câu 23.** (HSG Bắc Giang 2013)

$$3) \text{ Tính giá trị của biểu thức } A = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}.$$

$$4) \text{ Rút gọn biểu thức } P = \left( \frac{\sqrt{a-2}+2}{3} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left( \frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right).$$

$$\text{Ta có } A = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt[3]{8+3.2^2\sqrt{3}+3.2.(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{8-3.2^2\sqrt{3}+3.2.(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$= (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) \quad A = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Điều kiện: } 2 < a \neq 11$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{a-2} \text{ (} 0 < x \neq 3 \text{)} \Rightarrow a = x^2 + 2$$

$$\text{Tính được } P = \frac{(x+2)}{3} \cdot \left( \frac{x}{3+x} + \frac{x^2+9}{9-x^2} \right) : \left( \frac{3x+1}{x^2-3x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{(x+2)}{3} \cdot \left( \frac{3(x+3)}{9-x^2} \right) : \left( \frac{2x+4}{x(x-3)} \right)$$

$$= \frac{(x+2)}{3-x} \cdot \frac{x(x-3)}{2x+4} = -\frac{x}{2} \quad = -\frac{\sqrt{a-2}}{2}$$

**Câu 24.** (Chuyên ĐHSPT 2007 VI) Cho  $a > 2$  chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^2 - 3a - (a-1)\sqrt{a^2 - 4} + 2}{a^2 + 3a - (a+1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} = \frac{1-a}{1+a}$$

**Giải**

Biến đổi về trái

$$"VT" = \frac{a^2 - 3a - (a-1)\sqrt{a^2 - 4} + 2}{a^2 + 3a - (a+1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$"VT" = \frac{(a^2 - 3a + 2) - (a-1)\sqrt{a^2 - 4} + \sqrt{a+2}}{(a^2 + 3a + 2) - (a+1)\sqrt{a^2 - 4} + \sqrt{a-2}} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$"VT" = \frac{(a-1)(a-2) - (a-1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}{(a+1)(a+2) - (a+1)\sqrt{(a-2)(a+2)}} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$"VYT" = \frac{(a-1)(\sqrt{a-2})(\sqrt{a-2} - \sqrt{a+2})}{(a+1)(\sqrt{a+2})(\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2})} \cdot \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}}$$

$$"VT" = \frac{1-a}{1+a} = "VP" (dpcm)$$

**Câu 25.** (Chuyên ĐHSPT 2007 V2) Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}; Q = x^4 - 7x^2 + 15 \quad (\text{Với } x > 0, x \neq 1)$$

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì Q-4P đạt giá trị nhỏ nhất

**Giải**

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)$$

$$P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = x - 1$$

$$Q - 4P = x^4 - 7x^2 + 15 - 4(x - 1) = (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x^2 - 4)^2 + (x - 2)^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{Min}(Q - 4P) = -1 \text{ khi } x = 2$$

**Câu 26.** (Chuyên ĐHSPT 2008 VI) Cho biểu thức

$$P = \frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{a-\sqrt{ab}} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}}{2} \quad \text{Với } a=0; b>0 \text{ và } a \text{ khác } b$$

a) Rút gọn P

b) Tìm a, b sao cho  $b = (a+1)^2$  và  $P = -1$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{(a+b)\sqrt{ab} + b\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + a\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{(a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} + ab + b\sqrt{a}) + a\sqrt{ab} - ab}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}} \right) - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}(a+b)} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
P &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}
\end{aligned}$$

**Câu 27** (Chuyên ĐHSPT 2008 V2) Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn :

$$b \neq c, \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}, a+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$$

Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

$$a+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \Leftrightarrow a+b = a+b+c+2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow c = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab}$$

Ta cần

$$\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{a + a - 2\sqrt{ac} + c}{b + b - 2\sqrt{bc} + c} (*)$$

thay  $c = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab}$  Với (\*)

$$\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{a + a - 2\sqrt{ac} + c}{b + b - 2\sqrt{bc} + c} = \frac{2a + 2b - 2b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac}}{2a + 2b - 2a + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc}}$$

$$\text{Ta có } = \frac{(a+b) - b + \sqrt{bc} - \sqrt{ab}}{(a+b) - a + \sqrt{ac} - \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 - \sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{c} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}; (dpcm)$$

**Câu 28.** (Chuyên ĐHSPT 2009 VI) Cho biểu thức:

$$A = \sqrt{20a+92} + \sqrt{a^4+16a^2+64}$$

$$B = a^4 + 20a^3 + 102a^2 + 40a + 200$$

a) Rút gọn A

b) Tìm a để  $A+B=0$

**Hướng dẫn**

Ta có

$$A = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{a^4 + 16a^2 + 64}} = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{(a^2 + 8)^2}}$$

$$A = \sqrt{a^2 + 20a + 100} = \sqrt{(a + 10)^2} = |a + 10|$$

$$B = (a^4 + 20a^3 + 10a^2) + 2(a^2 + 20a + 100) = a^2(a + 10)^2 + 2(a + 10)^2 = (a + 10)^2(a^2 + 2)$$

$$A = |a + 10| \geq 0; B = (a + 10)^2(a^2 + 2) \geq 0; A + B \geq 0 \text{ dấu "=" khi } a = -10$$

**Câu 29.** (Chuyên ngữ 2010) Cho biểu thức:

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} + \frac{2x}{9 - x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

b) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị x để  $P = -\frac{4}{3}$

1) ĐKXĐ  $x > 0; x \neq 9; x \neq 25$

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x}) + 2x}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} \right) : \left( \frac{(\sqrt{x} - 1) - 2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)} \right)$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{5 - \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x} - 5}$$

2)

$$P = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x} - 5} = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow 3x + 4\sqrt{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow 3x - 6\sqrt{x} + 10\sqrt{x} - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(3\sqrt{x} + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in DKXD$$

**Câu 30.** (Chuyên ĐH SP 2013 VI). Cho biểu thức

$$Q = \frac{\left( \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; b > 0; a \neq b.$$

Chứng minh rằng giá trị biểu thức Q không phụ thuộc vào a, b

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\left( \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(a - b)} \\ &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{(3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - 3a^2 - 3b\sqrt{ab}}{(3a^2 + 3b\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = 0 \end{aligned}$$