

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp thế

Nội dung phương pháp: Thông thường ta rút một biến hoặc một biểu thức thích hợp từ một phương trình và thay vào phương trình còn lại của hệ ta thu được phương trình một ẩn.

Chú ý:

- Phương trình một ẩn này phải giải được
- Một phương trình trong hệ có thể đưa về tích của các phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 & (1) \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow xy = \frac{6x+6-x^2}{2}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^4 + 2x^2 \left(\frac{6x+6-x^2}{2} \right) + \left(\frac{6x+6-x^2}{2} \right)^2 = 2x+9 \Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Với $x = 0$ thay vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn.

Với $x = -4$ thay vào phương trình (2) ta được $y = \frac{17}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :
$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{17}{4} \end{cases}$$

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} xy^2 + 3 = y \\ xy\sqrt{xy^2 + y + 5} + 2y + 3 = y^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (0; 3); (-2; 1); (-4; -1)$$

$$2) \begin{cases} x^4 + x^3 - y(2x^2 + x - y) = 2 \\ x - 1 = \sqrt{y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 0)$$

$$3) \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; -1); \left(-2; -\frac{5}{2}\right)$$

$$4) \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}.$$

HD: phương trình (2) $\Leftrightarrow y^2 - 5x^2 = 4$. Thay vào phương trình (1) được:

$$x^3 + (y^2 - 5x^2)y = y^3 + 16x \quad \text{ĐS: } (x; y) = (0; 2); (0; -2); (1; -3); (-1; 3)$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

Với $x = -y$ (vô lí)

Với $x = 2y + 1$. Thay vào phương trình (2) và biến đổi, thu gọn ta được:

$$(y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ (do } y \geq 0 \text{)} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Bài tập:

Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (1; 1); (-1; -1)$$

$$2) \begin{cases} 6x^2 - 3xy + x + y = 1 \\ 3x + y + \sqrt{3x + y^2} = 2 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (0; 1); \left(\frac{1}{3}; 0\right)$$

$$3) \begin{cases} y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 \\ y^2 = (5x + 4)(4 - x) \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (0; 4); (4; 0); \left(\frac{-4}{5}; 0\right)$$

$$4) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy - x + 2y \\ (y+1)\sqrt{3(x+y)} - (x+3)\sqrt{x-y} = 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (2\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4})$$

$$5) \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{HD} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1); \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Nội dung phương pháp:

Điểm quan trọng nhất trong việc giải hệ là phát hiện ẩn phụ $u = f(x; y), v = g(x; y)$. Có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một số phép biến đổi cơ bản

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải

Đặt $y = -z$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + z^3 - 3(x^2 + z^2) - 9(x + z) + 22 = 0 \\ x^2 + z^2 - (x + z) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^3 - 3xz(x+z) - 3[(x+z)^2 - 2xz] - 9(x+z) + 22 = 0 \\ (x+z)^2 - 2xz - (x+z) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} x+z = S \\ xz = P \end{cases}, S^2 \geq 4P.$

Ta có:
$$\begin{cases} S^3 - 3SP - 3(S^2 - 2P) - 9S + 22 = 0 \\ S^2 - 2P - S = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z=2 \\ xz=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}.$

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 3(x^2 + y^2) + 4xy = 3 \\ x^2 - 2y^2 - 4x - 2y = -4 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2 - (x^2 - 2y) = 3 \\ (x^2 - 2y^2) - 2(2x+y) = -4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+y \\ v = x^2 - 2y^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (0; 1); \left(\frac{8}{7}; -\frac{9}{7}\right)$$

$$2) \begin{cases} x^4 + y^2 + xy(x^2 - 2x - y) = -2 \\ 2(x^2 - y) - xy(2x^2 - 2y + 1) = 5 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y)^2 + xy(x^2 - y) = -2 \\ 2(x^2 - y) - xy(x^2 - y + 1) = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 - y = u \\ xy = v \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 3)$$

$$3) \begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(2+y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x(1+y+y^2) + y - 11 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)^2 + x^2y^2(x+y) = 30 \\ xy(x+y) + xy + x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;2); (2;1); \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right); \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$$

$$4) \begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^3+xy = -\frac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy(x^2+y)+xy = -\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2+y=u \\ xy=v \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right); \left(1; -\frac{3}{2}\right)$$

$$5) \begin{cases} xy^2+x+y+\frac{1}{y} = 4 \\ y^2+x+\frac{1}{y} = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1); (3;-1)$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x+y+7} = 3 \\ \sqrt{x^2+xy+4} + \sqrt{y^2+xy+4} = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (5;-4)$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2+1+y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

Giải

Nhận xét: $y = 0$ không phải là nghiệm nên hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \left(\frac{x^2+1}{y}\right)(y+x-2) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = u \\ y+x-2 = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ y+x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$.

Bài tập

Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = u \\ \frac{x}{y} = v \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (3; 1); \left(\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$2) \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x+y + \frac{1}{x+y} + x-y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+y + \frac{1}{x+y} = u, |u| \geq 2 \\ x-y = v \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (1; 0)$$

$$3) \begin{cases} y + y^2 x = 6x^2 \\ 1 + x^2 y^2 = 5x^2 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \left(\frac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 - 2\frac{x}{y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{y}{x} = v \\ \frac{1}{x} + y = u \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 2); \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$4) \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}.$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 5 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = 49 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+\frac{1}{x} = u \\ y+\frac{1}{y} = v \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; -1\right); \left(-1; \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$5) \begin{cases} 9y^3(3x^3-1) = -125 \\ 45x^2y+75x = 6y^2 \end{cases}$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \\ 3x \cdot \frac{5}{y} \left(3x + \frac{5}{y}\right) = 6 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x \\ v = \frac{5}{y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{2}{3}; 5\right)$$

3. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Nội dung phương pháp

Điểm quan trọng của phương pháp này là biến đổi một phương trình của hệ về dạng $f(u) = f(v)$ với f là hàm số đơn điệu trên D . Từ đó suy ra $u = v$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Giải

Đk: $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y})$

Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 1)t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến với $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0 \quad (*)$$

Nhận xét $x = 0, x = \frac{3}{4}$ không phải là nghiệm của (*)

Xét $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7$ trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$$

$\Rightarrow g(x)$ là hàm nghịch biến

Mặt khác $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ là:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau:

1)
$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{HD: hệ} \Leftrightarrow 2y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$

$$\text{Xét } f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+1}\right) \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến} \Rightarrow 2y=\frac{1}{x} \Rightarrow (x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$$

$$2) \begin{cases} (2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3y\left(2+\sqrt{9y^2+3}\right)=0 \\ 4x^3-3y+3\sqrt{1-3y}=-5 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x;y)=\left(-1;\frac{1}{3}\right)$$

$$3) \begin{cases} 2(x+y)^3+4xy-3=0 \\ (x+y)^4-2x^2-4xy+y^2+x-3y+1=0 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$4) \begin{cases} x^3y-y^4=7 \\ x^2y+2xy^2+y^3=9 \end{cases}.$$

$$\text{HD: Phương trình (2)} \Leftrightarrow y(x+y)^2=9 \Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{y}}-y$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y}=t>0 \Rightarrow 0<t<\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào phương trình (1) thu gọn: } t^2\left[\left(3-t^3\right)^3-t^9\right] &= 7t^3 \\ \Leftrightarrow t^2\left[\left(3-t^3\right)^3-t^9\right]-7t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^9-\left(3-t^3\right)^3+7t &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t)=t^9-\left(3-t^3\right)^3+7t=0, 0<t<\sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow f'(t)=9t^8+9t^2\left(3-t^3\right)^2+7>0$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến} \Leftrightarrow t=1.$$

$$\text{ĐS: } (x;y)=(2;1)$$

$$5) \begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x;y)=(1;1);(1;-1)$$

$$6) \begin{cases} \frac{x^4-16}{8x}=\frac{y^4-1}{y} \\ x^2-2xy+y^2=8 \end{cases}.$$

HD: phương trình (1) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = f(y)$, với $f(t) = \frac{t^4 - 1}{t}, (t \neq 0)$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (\pm 2\sqrt{2}; \pm 4\sqrt{2})$$

$$7) \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy+6x+1 \end{cases}.$$

HD: phương trình (1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = -y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (1; -1); \left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$$

$$8) \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}+1} \end{cases}.$$

HD: phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{3-2y}) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$$\text{ĐS: } (x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right)$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 2 = 3x - 2y^2 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2-3\sqrt{2y-y^2}+2} = 0 & (2) \end{cases}.$$

Giải

$$\text{Đk: } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Đặt $z = x+1 \Rightarrow z \in [0; 2]$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow z^3 - 3z^2 = y^3 - 3y^2$. Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 3t^2, \forall t \in [0; 2]$

$\Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \leq 0, \forall t \in [0; 2] \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0; 2]$.

Mà $f(z) = f(y) \Leftrightarrow z = y \Leftrightarrow x+1 = y$

Thay vào phương trình (2) có: $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$

Bài tập:

Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (2; 1)$$

$$\begin{aligned}
 2) & \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1) \\
 3) & \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\
 4) & \begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y \\ x^8 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}; \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right); \left(-\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}; -\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \\
 5) & \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2 + 2y + 22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

HD: Trừ vế với vế của hai phương trình ta được:

$$f(x) = f(y) \text{ với } f(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 22} + \sqrt{t} + t^2 + 2t + 1, t > 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào phương trình thứ nhất $\Rightarrow$ Phương trình có dạng :

$$g(x) = g(1), \text{ với } f(x) = x^2 + 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x}, t > 0$$

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 22}} > 2 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 22}} > 0$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$

4. Phương pháp đánh giá

Nội dung phương pháp: Với phương trình này cần phát hiện các biểu thức không âm trong hệ và nắm vững cách vận dụng các bất đẳng thức cơ bản.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) \\ x - 2 = 2(y+1)^2(y-2) \end{cases}$$

Nếu $x > 2$ thì từ phương trình (1) $\Rightarrow y - 2 < 0$. Điều này mâu thuẫn với phương trình (2):

$x - 2$ và $y - 2$ cùng dấu

Nếu $x < 2$. Lập luận tương tự, suy ra vô lý

Nếu $x = y = 2$ thay vào thỏa mãn hệ.

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

Giải

Cộng vế với vế hai phương trình ta được:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 2^3} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{2} = |xy|$$

$$\text{Tương tự } \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq |xy|$$

$$\text{Mặt khác: } x^2 + y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \text{VT (1)} \leq \text{VP (1)}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Thử lại ta được nghiệm của hệ là: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Bài tập

Giải các hệ phương trình :

$$1) \begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases}$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \\ z = \frac{60y^2}{36y^2 + 25} \\ x = \frac{60z^2}{36z^2 + 25} \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}.$$

$$\text{ĐS: } x = y = 1$$

$$3) \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } x = y = 3$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 + 3 = 0 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y - 24 = 0 \end{cases}$$

HD: Cộng 2 vế của phương trình được

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21$$

$$\Rightarrow VT \leq 12; VT \geq 12$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (16; 3)$$

$$5) \begin{cases} (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = \frac{7}{2}xy \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\text{HD: Phương trình (2)} \Rightarrow y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]; x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$$

$$\text{Phương trình thứ nhất} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{t} \Rightarrow f(t)$ đồng biến với $\forall t \in (0; +\infty)$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) \geq f(2) \cdot f(1) = \frac{7}{2} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (2; 1)$$

$$6) \begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = \frac{12\sqrt{3}-1}{4} \\ y^4 + 2x^3 - y = \frac{-12\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

HD: Cộng vế hai phương trình ta được:

$$\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$7) \begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{HD: } \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2(x+y)^2 + (x+y) + (2y-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Có: $(x+y)^2 \geq 4xy$. Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow 2(x+y)^3 + (x+y)^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 1$

Phương trình (2)

$$(x+y)^4 - 2(x+y)^2 + 1 + [(x+y)-1] + (2y-1)^2 = 0 \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1)$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = 3(x + y) \\ \sqrt{2x + y + 1} + 2\sqrt[3]{7x + 12y + 8} = 2xy + y + 5 \end{cases}$$

$$\text{HD: } \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2}$$

$$= \sqrt{(2x + y)^2 + (x - y)^2} + \sqrt{(x + 2y)^2 + (x - y)^2} \geq |2x + y| + |x + 2y| \geq 3|x + y| \geq 3(x + y)$$

Vậy phương trình thứ nhất $\Leftrightarrow x = y \geq 0$

Thay vào phương trình (2): $\sqrt{3x + 1} + 2\sqrt[3]{19x + 8} = 2x^2 + 5x + 5$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \left[(x + 1) - \sqrt{3x + 1} \right] + 2 \left[(x + 2) - \sqrt[3]{19x + 8} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x) + \frac{x^2 - x}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} + \frac{(2x + 14)(x^2 - x)}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{19x + 8} + \sqrt[3]{(19x + 8)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0.$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = (0; 0); (1; 1)$$