

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Phương trình, bất phương trình chứa căn thức là một phần quan trọng của môn Đại số ở bậc phổ thông. Đây cũng là dạng toán khiến các bạn học sinh gặp khó khăn vì dạng bài tập phong phú, đòi hỏi nhiều kỹ năng tính toán và biến đổi. Chúng tôi xin giới thiệu *Một số phương pháp giải phương trình, bất phương trình chứa căn thức* để giúp các bạn học sinh cơ bản nắm được cách giải quyết các bài toán dạng này.

I. Một số dạng cơ bản của phương trình, bất phương trình chứa căn thức.

1. Phương trình

$$a) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$b) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

Vd1: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 1$ (1)

Hướng dẫn:

Nhận xét: Phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ nên ta giải như sau

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy $S = \{1\}$

Vd2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12}$ (2)

Hướng dẫn: Ta có

$$\begin{aligned} (2) \quad & \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = -2x^2 - 3x + 12 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 4) \geq 0 \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \\ x = 2 \\ x = \frac{-8}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-8}{6}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{8}{6} \right\}$$

2. Bất phương trình

$$\text{a) } \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ 0 \leq f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Vd3: Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } x+1 \geq \sqrt{2(x^2-1)}$$

$$\text{b) } 2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3}, \quad S = \left[1; \frac{14}{5} \right)$$

Hướng dẫn

a) Ta có :

$$x+1 \geq \sqrt{2(x^2-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq 2(x^2-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm } S = [1; 3] \cup \{-1\}$$

$$\text{b) Ta có } 2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -x^2+4x-3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ (2x-5)^2 < -x^2+4x-3 \end{cases} \quad (2)$$

Giải (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{5}{2}$$

Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2 - 24x + 28 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 2 < x < \frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x < \frac{14}{5}$$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1; \frac{14}{5}\right)$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp bình phương liên tiếp

Sử dụng phương pháp bình phương liên tiếp nhằm biến đổi phương trình, bất phương trình về dạng không còn chứa căn thức. Tuy nhiên khi bình phương hai vế của phương trình, bất phương trình nhớ đặt điều kiện cho hai vế cùng dấu (đối với phương trình có thể giải bằng phương trình hệ quả sau đó thử lại kết quả, còn đối với bất phương trình bắt buộc phải đặt điều kiện cho hai vế cùng dấu)

Vd1: Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{6-x}$

Hướng dẫn:

Điều kiện $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 6 \end{cases}$

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{6-x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x+1} = \sqrt{6-x} + \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow & 3x+1 = 6-x+2x-1+2\sqrt{6-x}\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow & 2x-4 = 2\sqrt{6-x}\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow & x-2 = \sqrt{6-x}\sqrt{2x-1} \quad (x \geq 2) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 = -2x^2 + 13x - 6 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 17x + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} (l) \end{aligned}$$

Vậy $S = \{5\}$

Vd2: Giải bất phương trình $2\sqrt{x-3} - \frac{1}{2}\sqrt{9-2x} \geq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn

Điều kiện $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 9-2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq \frac{9}{2}$

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} \geq \frac{1}{2}\sqrt{9-2x} + \frac{3}{2} \\ & \Leftrightarrow 4(x-3) \geq \frac{1}{4}(9-2x) + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{9-2x} \\ & \Leftrightarrow 16x-48 \geq 18-2x+6\sqrt{9-2x} \\ & \Leftrightarrow 9x-33 \geq 3\sqrt{9-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x-64 \geq 0 \\ (9x-33)^2 \geq 9(9-2x) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{32}{9} \\ 81x^2-576x+1008 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{32}{9} \\ x \leq \frac{28}{9} \Leftrightarrow x \geq 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[4; \frac{9}{2}\right]$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Mục đích của phương pháp đặt ẩn phụ là đưa phương trình bất phương trình về dạng cơ bản hoặc là dạng đã biết cách giải. Từ nghiệm của phương trình, bất phương trình mới ta suy ra nghiệm của phương trình, bất phương trình ban đầu.

Chú ý:

Phương trình, bất phương trình mới không tương đương với phương trình bất phương trình cũ (vì khác tập hợp nghiệm) mà chỉ tương đương theo nghĩa từ phương trình, bất phương trình này ta suy ra nghiệm của phương trình, bất phương trình kia và ngược lại.

Dạng 1. Đặt ẩn phụ khi thấy các biểu thức có dạng giống nhau. Đặt $t = f(x)$, đưa phương trình, bất phương trình theo biến x về phương trình bất phương trình theo biến t (Chú ý đặt điều kiện cho biến t (nếu có)).

Vd1: Giải phương trình $\sqrt{3x^2-2x+9} + \sqrt{3x^2-2x+2} = 7$

Nhận xét:

Ta thấy biểu thức dưới dấu căn đều có số hạng $3x^2-2x$, và đây là biểu thức chung, chú ý rằng chúng ta quan tâm đến những biểu thức chung chứa biến, còn nếu có thêm hằng số cũng không quan trọng, và ta có thể đặt ẩn $t = 3x^2-2x$, để đưa phương trình về dạng cơ bản, tuy nhiên để bài toán được gọn hơn ta thường đặt ẩn phụ cho nguyên biểu thức căn, tức là đặt $t = \sqrt{3x^2-2x+2}$

Ta giải bài toán này như sau:

Đặt $t = \sqrt{3x^2 - 2x + 2}$ điều kiện $t \geq 0$. Khi đó $\sqrt{3x^2 - 2x + 9} = \sqrt{t^2 + 7}$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{t^2 + 7} + t = 7 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{t^2 + 7} = 7 - t \\ \Leftrightarrow & t^2 + 7 = (7 - t)^2 \quad (\text{dk } t \leq 7) \\ \Leftrightarrow & t^2 + 7 = t^2 - 14t + 49 \\ \Leftrightarrow & t = 3 \end{aligned}$$

Với $t = 3$ ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x^2 - 2x + 2} = 3 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 2x + 2 = 9 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 2x - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{22}}{3} \\ x = \frac{1 - \sqrt{22}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left(\frac{1 + \sqrt{22}}{3}; \frac{1 - \sqrt{22}}{3} \right)$$

Vd2: Giải bất phương trình $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

Hướng dẫn:

Ta có:

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 5x + 4 < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ điều kiện $t \geq 0$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & t^2 - 24 < 5t \\ \Leftrightarrow & t^2 - 5t + 24 < 0 \\ \Leftrightarrow & -3 < t < 8 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $0 < t < 8$ (1)

Với $t < 8$ ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 5x + 28} < 8 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + 5x + 28 \geq 0 \\ x^2 + 5x + 28 < 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 5x - 36 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < x < 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Với $t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 28} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có nghiệm của bất phương trình là $S = (-9; 4)$

Vd3: Giải bất phương trình: $2x(x-1) + 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$, điều kiện $t \geq 0$, suy ra $2x(x-1) = 2(t^2 - 1)$

Bất phương trình trở thành:

$$2(t^2 - 1) + 1 > t$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{2} \\ t > 1 \end{cases} (l)$$

$$\text{Với } t > 1 \text{ ta có } \sqrt{x^2 - x + 1} > 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

Dạng 2. Các phương trình, bất phương trình có biểu thức $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm m\sqrt{AB}$ trong đó $A+B$ là hằng số. Khi đó đặt $t = \sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, suy ra $\sqrt{AB} = \pm \frac{t^2 - (A+B)}{2}$. Đưa phương trình bất phương trình về ẩn t .

Vd4: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$

Hướng dẫn:

Điều kiện $-2 \leq x \leq 5$

Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$ (điều kiện $t \geq 0$).

$$\text{Suy ra } t^2 = 7 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{5-x} = 7 + 2\sqrt{(x+2)(5-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{t^2 - 7}{2}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} t + \frac{t^2 - 7}{2} &= 4 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 & (l) \\ t = 3 & (n) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 3$ ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow 7 + 2\sqrt{(x+2)(5-x)} &= 9 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(5-x)} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} & (n) \\ x = \frac{3-3\sqrt{5}}{2} & (n) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \right\}$

Vd5: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x} + 3\sqrt{(2x+1)(9-2x)} > 13$

Hướng dẫn

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$

Đặt $t = \sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x}$ (điều kiện $t \geq 0$). Suy ra $\sqrt{(2x+1)(9-2x)} = \frac{t^2 - 10}{2}$

Bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t + 3 \cdot \frac{t^2 - 10}{2} &> 13 \\ \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 56 &> 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{14}{3} & (l) \\ t > 4 & (n) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t > 4$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x} &> 4 \\ \Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{(2x+1)(9-2x)} &> 16 \\ \Leftrightarrow (2x+1)(9-2x) &> 9 \\ \Leftrightarrow 16x - 4x^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 4 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 4)$

Dạng 3. Các phương trình có dạng $m\sqrt{A} + n\sqrt{B} \pm p\sqrt{AB}$. Khi đó đặt $t = \sqrt[4]{\frac{A}{B}}$ (xét $B = 0, B \neq 0$)

Hoặc đặt $u = \sqrt[4]{A}, v = \sqrt[4]{B}$. Tính u theo v .

Vd6: Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \sqrt[4]{\frac{x^2 - x - 2}{4}}$

Hướng dẫn

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Đặt $a = \sqrt[4]{x+1}, b = \sqrt[4]{x-2}$ điều kiện $a, b \geq 0$

Khi đó phương trình trở thành $a^2 - b^2 = \frac{ab}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}b^2 - ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{2}}b \end{cases}$

Với $a = 2\sqrt{2}b$ ta có $\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x+1 = 4(x-2) \Leftrightarrow x=3$

Với $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}b$ ta có $\sqrt[4]{x+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x-2} \Leftrightarrow x+1 = x-2 = 0 (vn)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{3\}$

Vd7: Giải bất phương trình $3\sqrt{2x-1} - 4\sqrt{x-1} \geq \sqrt[4]{\frac{2x^2-3x+1}{36}}$

Hướng dẫn

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét $x \neq 1$, chia hai vế của bất phương trình cho $\sqrt[4]{2x^2-3x+1}$ ta có

$$3\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} - 4\sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} = \frac{1}{t}$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó bất phương trình trở thành

$$3t - \frac{4}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 3\sqrt{6}t^2 - t - 4\sqrt{6} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{-16}{6\sqrt{6}} (l) \\ t \geq \sqrt{\frac{3}{2}} (n) \end{cases}$$

$$\text{Với } t \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ta có } \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{-x+5}{4(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 5$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 5]$

Dạng 4. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Vd8: Giải phương trình: $\frac{x^3-1}{2} = \sqrt[3]{2x+1}$

Hướng dẫn

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{2x+1} \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{2}$$

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} x^3 - 1 = 2t & (1) \\ t^3 - 1 = 2x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta có:

$$x^3 - t^3 = 2t - 2x \Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) + 2(x-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-t=0$$

$$(\text{Vì } x^2 + xt + t^2 + 2 = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + 2 > 0)$$

Với $t = x$ ta có

$$x^3 - 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có 3 nghiệm } S = \left\{-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Vd9: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ (*)

Hướng dẫn

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt[3]{x+34} \\ v = \sqrt[3]{x-3} \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 37$$

$$(*) \Leftrightarrow u - v = 1$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} u^3 - v^3 = 37 & (1) \\ u - v = 1 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow u = v + 1$ (3), sau đó thay vào (1) ta có:

$$(v+1)^3 - v^3 = 37$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ v = -4 \end{cases}$$

$$\bullet v = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = 3 \Leftrightarrow x = 30$$

$$\bullet v = -4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = -4 \Leftrightarrow x = -61$$

Vd10: Giải phương trình: $7\sqrt{4x^2 + 5x - 1} - 14\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 17x - 13$ (*)

Hướng dẫn

$$(*) \Leftrightarrow 7\sqrt{4(x^2 - 3x + 3)} + 17x - 13 - 14\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 17x - 13$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 17x - 13 \\ v = \sqrt{x^2 - 3x + 3} \quad (v \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+13}{17} \\ v^2 = \left(\frac{u+13}{17}\right)^2 - 3\left(\frac{u+13}{17}\right) + 3 = \frac{u^2 - 25u + 373}{289} \end{cases}$$

$$(*) \text{ trở thành } 7\sqrt{4v^2 + u} - 14v = u$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 7\sqrt{4v^2 + u} = 14v + u & (1) \\ v^2 = \frac{u^2 - 25u + 373}{289} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 49(4v^2 + u) = (14v + u)^2$$

$$\Leftrightarrow 49u = 28uv + u^2$$

$$\Leftrightarrow u(u + 28v - 49) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 49 - 28v \end{cases}$$

$$\bullet u = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{17}$$

$$\bullet u = 49 - 28v$$

Thay vào (2):

$$v^2 = \frac{(49 - 28v)^2 - 25(49 - 28v) + 373}{289}$$

$$\Leftrightarrow 289v^2 = 784v^2 - 2044v + 1549$$

$$\Leftrightarrow 495v^2 - 2044v + 1549 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ v = \frac{1549}{495} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} = \frac{1549}{495} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{746}{495} \\ x = \frac{2231}{495} \end{cases}$$

Thay các giá trị vào phương trình đầu ta nhận nghiệm: $x = 2, x = -\frac{746}{495}$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{746}{495}, \frac{13}{17}, 2 \right\}$$

Chú ý:

- Từ phương trình ta suy ra hệ, nên khi giải ra nghiệm ta phải thử lại.
- Phương pháp này chỉ hiệu quả trong việc giải phương trình, còn bất phương trình thì rất khó sử dụng.

3. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

Vd11: Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$

Hướng dẫn

Đặt: $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x}, t > 0$

$$\Rightarrow t^2 = (\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x})^2 \stackrel{BCS}{\leq} (1^2 + 1^2)(x-2+10-x) = 16$$

$$\Rightarrow |t| \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{10-x} \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Mặt khác: } x^2 - 12x + 40 = (x-6)^2 + 4 \geq 4, \text{ dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} \leq x^2 - 12x + 40$$

$$\text{Vậy } S = \{6\}$$

4. Dùng khảo sát hàm số để biện luận phương trình, bất phương trình chứa tham số

Vd12: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \in [-3; 6]$

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}, x \in [-3; 6]$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{(6-x)(3+x)}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3\sqrt{2}$$

Ta có:

- $x = -3 \Rightarrow t = 3$
 - $x = 6 \Rightarrow t = 3$
- và $t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

Bảng biến thiên:

x	-3		6
t'		+	0 -
t	3	$\nearrow 3\sqrt{2}$	$\searrow 3$

$$\Rightarrow t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

Xét

$$f(t) = t - \frac{t^2 - 9}{2}, \quad t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$f'(t) = 1 - t, \quad f(3) = 3, \quad f(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - \frac{9}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	3		$3\sqrt{2}$
$f'(t)$		—	
$f(t)$	3		$3\sqrt{2} - \frac{9}{2}$

Vậy $m \in \left[3; 3\sqrt{2} - \frac{9}{2}\right]$ thì phương trình có nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

I. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1 \quad S = \{0; 1\}$$

$$2) \sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 5 \quad S = [1; 10]$$

$$3) \sqrt{x-5} - \frac{x-14}{x+\sqrt{x-5}} = 3 \quad S = \{3; 14\}$$

$$4) \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7} \quad S = \{2\}$$

$$5) \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = 0 \quad S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$6) x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \quad S = \left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$$

$$7) \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1} \quad S = \{1; 2\}$$

$$8) \sqrt[3]{x^2+26} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 8 \quad S = \{1\}$$

$$9) \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt{\frac{1}{2}-x} = 1 \quad S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$10) \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} = x \quad S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$11) (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2x \quad S = \left\{-\frac{24}{25}; 0\right\}$$

II. Giải bất phương trình

$$1) \frac{3x}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$S = (-\infty; 1)$$

$$2) \frac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}{x+4} < \frac{1}{2}$$

$$S = (-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{7}\right)$$

$$3) \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - \sqrt{2x+4} > 0$$

$$S = [-2; +\infty)$$

$$4) \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$S = \{1\} \cup [4; +\infty)$$

$$5) \frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$S = \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1\right)$$

$$6) x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$$

$$7) \sqrt{1-x^2} + 1 < \sqrt{3-x^2}$$

$$S = \left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$$

$$8) \sqrt{5+x} - \sqrt{-3-x} < -1 + 4\sqrt{(x+5)(-3-x)}$$

$$S = \left[-5; \frac{-8+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$9) \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}$$

$$S = [-1; 1]$$

$$10) \sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$$

$$S = [2; 10)$$

$$11) (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$$

$$S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$$

III. Tìm m để:

$$1) \sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m} \text{ có nghiệm..}$$

$$2) \sqrt{12 - \frac{x^2}{3}} = 2m - x \text{ có hai nghiệm.}$$

$$3) \sqrt{x(2-x) + m + 3} \geq x^2 - 2x + 5 \text{ có nghiệm chứa } [0; 1].$$

$$4) \sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

IV. Phương trình bất phương trình chứa căn thức trong các kỳ thi đại học gần đây

Bài 1. Giải bất phương trình $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ (D - 2002)

Bài 2. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ (A - 2004) $S = [4; +\infty)$

Bài 3. Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad (\text{B} - 2004) \quad m \in [\sqrt{2} - 1; 1]$$

Bài 4. Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ (A - 2005) $S = [2; 10)$

Bài 5. $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \quad (\text{B} - 2006) \quad m \in \left[\frac{9}{2}; +\infty \right)$$

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ (D - 2006) $S = \{1; 2 - \sqrt{2}\}$

Bài 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \quad (\text{A} - 2007) \quad m \in \left[-1; \frac{1}{3} \right]$$

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của m , phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$ (B - 2007)

Bài 10: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \quad (m \in \mathbb{R}) \quad (\text{A} - 2008)$$
$$m \in \left[2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}; 3\sqrt{2} + 6 \right)$$