**CÁC DẠNG KHÁC**

1. Tìm các giá trị thực của tham số  để dãy số : có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) .

Xét hàm số:  ta có  nghịch biến trên .

Suy ra đơn điệu và bị chặn.

+ .

.

Giả sử .

.

Khi  hệ (I) có nghiệm duy nhất ⇒  có giới hạn hữu hạn.

Khi  hệ (II) có nghiệm duy nhất lớn hơn  và hệ (III) có nghiệm thỏa mãn . Do đó  không có giới hạn.

.

 không có giới hạn.

+.

+.

 không có giới hạn.

\*)  tượng tự ta có  và .

1. Cho số thực xét dãy số được xác định bởi . Tìm tất cả các giá trị của  để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

**Hướng dẫn giải**

Với thì nên .

Với  thì .

Do đó .

Từ đó, tính được ,.

Kết luận + .

+.

+.

1. Cho hai dãy số dương  xác định bởi:  và . Với mọi . Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp . Thật vậy.

Với , ta có , vậy  đúng.

Với , ta có , vậy  đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến , tức là .

Ta chứng minh . Thật vậy. Từ  ta có.



Khi đó từ , suy ra .

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì .

Do đó .

Kết luận: .■.

1. Cho dãy số xác định như sau : . Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng knn ; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay .

.

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được  (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy  tăng knn, bị chặn trên bới , do đó dãy số  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và .

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Tìm *a* sao cho dãy số xác định và có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có . Ta có.

.

Bảng biến thiên.

Ta xây dựng dãy số như sau .

Nhận thấy .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy .

.

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy  đơn điệu giảm, bị chặn bởi 0 và , dãy  đơn điệu tăng và bị chặn bởi  và 0. Từ đó tồn tại .

Ta có .

 (\*).

(do  liên tục trên ,  và ).

Xét . Ta có  nên . Vậy .

Tương tự ta chứng minh được dãy  đơn điệu tăng, hội tụ về .

+) Nếu  thì  nên ta có dãy .

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu  ta có dãy .

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu tồn tại *n* sao cho  thì ta có.

.

Khi đó không tồn tại .

Vậy nếu  thì dãy không xác định.

+) Nếu  thì hai dãy con  cùng hội tụ về 0 nên giới hạn của dãy là 0.

Nếu  thì  và hàm số đồng biến nên dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1. Khi đó dãy hội tụ về 1.

+) Nếu  thì . Khi đó ta có thể khảo sát dãy từ . Trường hợp này dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi  nên hội tụ về.

+) Nếu a = 1 thì  nên dãy hội tụ về .

+) Nếu  ta có  và  nên tồn tại  sao cho  (Thật vậy, các số hạng của  không thể cùng nằm bên trái a do , chúng cũng không thể cùng nằm bên phải  do nếu thế thì ).

Vậy . Khi đó ta lại có dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ về 1.

Vì f(x) là hàm lẻ nên trường hợp  ta khảo sát tương tự.

Kết luận: Điều kiện để dãy xác định và có giới hạn hữu hạn là.

.

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có  (do ).

Nhận xét: .

Ta sẽ chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nap.

Thật vậy.

Với  ta có  (đúng).

Giả sử .

Ta có .

.

 (đúng).

Suy ra .

Như vậy  (điều phải chứng minh).

Mặt khác, .

(1).

Áp dụng (1) ta có.

.

Suy ra .

.

.

 (2).

Ta lại có  (do ).

Suy ra .

Từ (2)  (vì ).

.

Mà .

Do đó  hay .

1. Cho  và . Xét dãy số  được xác định bởi: , với mọi . Chứng minh dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

\* Theo bất đẳng thức Côsi ta có:.

, với . (1).

Do đó: .

Từ (1) và (2) ta có dãy số  giảm và bị chặn dưới bởi ;.

suy ra dãy số  có giới hạn hữu hạn khi .

Giả sử ; ().

Chuyển qua giới hạn hệ thức .

ta có phương trình .

 (thỏa mãn điều kiện).

Vậy .

1. Cho trước số thực dương  và xét dãy số dương  thỏa mãn  với mọi . Chứng minh rằng dãy  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số .

Ta có ; .

Ta có bảng biến thiên của hàm f(x):.

.

Suy ra .

Do đó .

Suy ra  hay  là dãy giảm. Kết hợp với  với mọi *n* ta suy ra dãy  hội tụ.

Đặt . Chuyển qua giới hạn ta được .

Vậy .

1. Tìm tất cả các hằng số sao cho mọi dãy số dãy số thỏa mãn đều hội tụ. Với giá trị  tìm được hãy tính giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu , thì từ giả thiết, ta có .

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra . Do  nên  khi . Do đó,  không thỏa mãn.

+ Nếu , thì tồn tại  sao cho . Thật vây, lấy  đặt , thì.

.

Chú ý là  Do đó, ta chỉ cần chọn như trên và  thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số xác định bởi.

.

thì dãy thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử,  cũng không thỏa mãn.

+ Nếu , thì . Suy ra dãy tăng và bị chặn. Do đó, hội tụ.

Đặt thì từ giả thiết ta có  hay  Vậy .

1. Cho dãy số  xác định như sau: , , . Tìm giới hạn của dãy  với .

**Hướng dẫn giải**

Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: .

Xét tính đơn điệu của dãy . Từ hệ thức  ta suy ra được , vậy dãy số  tăng.

Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được .

 với .

Thay n bởi 1, 2, 3,., n vào (\*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra :.

.

Do dãy  là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:.

1) Dãy  bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, nên  tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử . Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi  ta có: , vô lý.

2) Dãy không bị chặn trên, do  tăng và không bị chặn trên nên .

Vì thế từ (2) ta suy ra: .

1. Cho dãy số (un) thỏa mãn : . Tính .

**Hướng dẫn giải**

.

Do  => .

suy ra  (1).

Lại có.

.

=> .

Suy ra.

.

Do .

và  (*Bất đẳng thức Bunhiacopxki*).

suy ra  (2).

Từ (1) và (2) suy ra.

.

Do đó .

1. Cho số thực *a*, xét dãy số xác định bởi: Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

.

.

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm sốliên tục và có đạo hàm trên , thì với mọi số thực *x,y* tồn tại  sao cho:.

.

Với  ta có: .

Mặt khác: bị chặn.

Do đó: .

Vậy là dãy Cauchy, nên dãy số đã cho hội tụ.

1. Cho hai dãy số  và  xác định như sau: và khi . Chứng minh rằng hai dãy  và  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có  suy ra  mà  khi .

Suy ra .

.

bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được.

.

.

Mặt khác  nên ta có.

.

.

Do đó.

.

1. Với mỗi , đặt .

a) Chứng minh đa thức  có duy nhất 1 nghiệm thực thuộc .

b) Chứng minh tồn tại giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có .

nên trong mỗi khoảng ,  có 1 nghiệm của phương trình .

Mặt khác, ta có  nên đa thức  có duy nhất 1 nghiệm  thuộc khoảng .

b) Ta có .

Do  có nghiệm không là nghiệm của nên nghiệm của phương trình  là nghiệm của phương trình:.

.

Ta có: .

Nên nghịch biến trên .

Lại có: .

⇒ .

.

Do đó dãy  là dãy giảm.

Lại có . Vậy dãy  có giới hạn.

1. Cho  và ,Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

.

.

.

1. Cho dãy  axác định bởi: . Tìm  nhỏ nhất thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  và . Chứng minh bằng quy nạp ta được  (\*).

Ta lại có: .

.

Do đó: .

Suy ra .

Mặt khác, chứng minh bằng quy nạp ta được dãy  tăng. Do đó nếu dãy  có giới hạn hữu hạn  thì . Vì phương trình  có duy nhất nghiệm là , bởi vậy dãy  không có giới hạn hữu hạn. Suy ra  (\*\*).

Với mọi  thì từ  suy ra tồn tại  sao cho . Do đó .

1. Cho  số thực: , . Xét dãy số  xác định như sau:..

Biết dãy số lập thành một cấp số cộng, chứng minh rằng  là số nguyên (với  là phần nguyên của số thực  – số nguyên lớn nhất không vượt quá  ).

**Hướng dẫn giải**

Đặt , . Gọi d là công sai của cấp số cộng , thì: .

Với mọi  ta luôn có: .

Cộng vế với vế của  bất đẳng thức cùng chiều, ta được:.

.

Thay  bởi  và thay  bởi , có:.

.

.

Cộng vế với vế của 2 bất đẳng thức cùng chiều nói trên thu được:.

.

.

.

.

Vì  nên suy ra . Mặt khác dãy  gồm toàn số nguyên nên công sai  cũng là số nguyên. Vậy  nguyên. (đpcm).

1. Cho dãy số  thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh  với mọi  (1).

Thật vậy đúng.

Giả sử (1) đúng với  : .

.

= .

.

.

 (đpcm).

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi .

Ta có .

.

 với mọi .

Vậy  có giới hạn.

1. Cho dãy số  tăng,và . Xét dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng tồn tại .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng thấy rằng dãy  tăng ngặt.

Trường hợp 1. Nếu .

.

vậy dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

Trường hợp 2. Nếu .

 thật vậy .

.

Ta chứng minh (\*\*).

Xét hàm số  Trên đoạn .

Hàm số thoả mãn điều kiện của định lí Lagrăng nên tồn tại số  thoả mãn  (đpcm).

Từ đó ta có dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

1. Cho dãy số xác định bởi . Đặt . Chứng minh tồn tại  ( trong đó  là phần nguyên của ).

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Suy ra .

Chứng minh .

Ta có : .

 suy ra dãy đã cho là tăng.

Như vậy .

Vậy , suy ra .

1. Cho dãy số  được xác định như sau .

Tìm các giới hạn sau:  và .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: :  (1).

Áp dụng (1) ta suy ra: .

Theo quy nạp ta có:  (2).

Lập luận tương tự ta cũng có:  (3).

Từ (2) và (3) ta suy ra: .

Lại có: , từ đó suy ra: .

Tương tự ta có : .

Mặt khác ta có: . Do đó ta có dãy bất đẳng thức sau:.

.

Như vậy theo định lí kẹp ta suy ra .

Hơn nữa theo đề bài ta có: .

Suy ra: .

Vậy .

.

.

Tóm lại ta có:  và .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có  (do ).

Nhận xét: .

Ta sẽ chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nap.

Thật vậy.

Với  ta có  (đúng).

Giả sử .

Ta có .

.

 (đúng).

Suy ra .

Như vậy  (điều phải chứng minh).

Mặt khác, .

(1).

Áp dụng (1) ta có.

.

Suy ra .

.

.

 (2).

Ta lại có  (do ).

Suy ra .

Từ (2)  (vì ).

.

Mà .

Do đó  hay .

1. Cho trước số thực dương  và xét dãy số dương  thỏa mãn  với mọi . Chứng minh rằng dãy  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số .

Ta có ; .

Ta có bảng biến thiên của hàm  :.

.

Suy ra .

Do đó .

Suy ra  hay  là dãy giảm. Kết hợp với  với mọi *n* ta suy ra dãy  hội tụ.

Đặt . Chuyển qua giới hạn ta được .

Vậy .

1. Cho dãy số thực  thỏa mãn . Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Xét dãy .

Ta thấy .

Ta có .

Vậy dãy  tăng, bị chặn trên nên hội tụ, .

Chuyển qua giới hạn ta được: .

Ta sẽ chứng minh  (\*) bằng quy nạp theo n.

Ta có . Giả sử .

Suy ra .

.

Vậy (\*) đúng với mọi n nguyên dương. Từ đó suy ra .

1. Cho dãy số thực  xác định bởi:. Chứng minh dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng quy nạp .

Ta có: =.

Vậy  với mọi  nên dãy bị chặn.

Xét  khi .

Ta có:.

.

.

Áp dụng định lý Lagrang có:.

 Do đó .

1. Cho dãy số  xác định bởi: . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên đặt .

Ta có .

Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được .

Xét.

.

Bài 1. Cho dãy số  xác định bởi.

.

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Theo Côsy thì.

 .

dãy giảm, bị chặn bởi 1, vậy dãy có giới hạn.

Từ .

1. Cho dãy số , xác định bởi: . Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số  trên . Ta thấy liên tục và nghịch biến trên  (Vì ). Do đó .

Ta có  với mọi n  dãy  bị chặn.

Mặt khác, ta có   .Suy ra dãy  là dãy đơn điệu tăng và bị chặn, còn dãy là dãy đơn điệu giảm và bị chặn, nên các dãy ,  có giới hạn hữu hạn.

Giả sử  và , ().

Từ .

.

Vậy ta có hệ .

Vậy lim  = .

1. Cho dãy số  được xác định bởi với mỗi số nguyên dương n, đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có kết quả sau: với số thực  bất kì, ta có.

.

Do đó  Suy ra dãy là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn .

Chuyển qua giới hạn điều kiện (\*) ta có phương trình.

.

phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2.

Suy ra dãy  tăng và không bị chặn trên nên .

Ta có .

.

.

.

Suy ra .

Vậy .

1. Dãy số thực  được xác định bởi: . Tìm tất cả các giá trị của a để  với mọi số tự nhiên n.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  với .

Từ  có *.*

Lại từ  có .

Suy ra  và .

Từ đó .

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

.

Mà  nên phải có .

Thử lại với  thì .

Vậy  là giá trị duy nhất cần tìm.

1. Cho dãy số thực (xn) xác định bởi: .

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng bất đẳng thức .

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: . mà  vì .

Vậy ta có .

Mặt khác: .

Vì  ⇔ .

⇒   do .

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , ta có phương trình:.

.

Xét hàm số .

.

.

. Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi .

⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất .

Vậy .

1. Cho hai dãy số dương  xác định bởi:  và . Với mọi . Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh bằng quy nạp . Thật vậy*.*

Với , ta có , vậy  đúng.

Với , ta có , vậy  đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến , tức là .

Ta chứng minh . Thật vậy. Từ  ta có.

Khi đó từ , suy ra .

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì .

Do đó .

Kết luận: .■.

1. Cho dãy số xác định như sau:.. Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng knn; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay .

.

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được .

Như vậy dãy  tăng knn, bị chặn trên bới , do đó dãy số  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và .

1. Cho dãy số  xác định bởi công thức truy hồi  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó.

.

Mặt khác  nên.

.

Từ (\*) và (\*\*) suy ra: .

Vậy:  Do đó  là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại .

Vì  liên tục trên  nên .

Vậy dãy  được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy  có giới hạn bằng .

1. Cho dãy số  xác định . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Theo giả thiết ta có:  mà  suy ra.

 do đó dãy là dãy tăng.

Giả sử dãy  bị chặn trên suy ra  với  khi đó.

.

Vô lý do . Suy ra dãy không bị chặn trên do đó.

.

Ta có.

.

.

1. Cho dãy số thực  xác định bởi: . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng bất đẳng thức .

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: . mà  vì .

Vậy ta có .

Mặt khác: .

Vì  . .

⇒    do .

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi  nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , ta có phương trình:.

.

Xét hàm số .

.

.

⇒ . Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi  ⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất .

Vậy .