

A . ĐẶT VẤN ĐỀ

I. LỜI MỞ ĐẦU

Trong chương trình hình học lớp 10 có một phần rất quan trọng của hình học phổ thông đó là phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, đây là phần tiếp nối của hình học phẳng ở cấp THCS nhưng được nhìn dưới quan điểm đại số và giải tích. Như vậy mỗi bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng đều mang bản chất của một bài toán hình học phẳng nào đó.

Tuy nhiên khi giải các bài toán hình học tọa độ học sinh thường không chú trọng đến bản chất hình học của bài toán ấy, một phần vì học sinh ngại hình học phẳng vì cứ nghĩ hình học phẳng là khó, một phần vì giáo viên khi dạy cũng không chú trọng khai thác hướng dẫn cho học sinh. Do đó hiệu quả giải toán không cao mà sự phân loại dạng toán, phương pháp giải toán cũng không rõ ràng.

Vì vậy, thực tế yêu cầu phải trang bị cho học sinh một hệ thống các phương pháp suy luận giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng. Với ý định đó, trong sáng kiến kinh nghiệm này tôi muốn nêu ra một cách định hướng tìm lời giải bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng dựa trên bản chất hình học phẳng của bài toán đó.

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1. Thực trạng

Đứng trước một bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng học sinh thường lúng túng và đặt ra câu hỏi: “ *Phải định hướng tìm lời giải bài toán từ đâu?* ”. Một số học sinh có thói quen không tốt là khi đọc đề chưa kỹ đã vội làm ngay, có khi sự thử nghiệm đó sẽ dẫn tới kết quả, tuy nhiên hiệu suất giải toán như thế là không cao. Với tình hình ấy để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng, người giáo viên cần tạo cho học sinh thói quen xem xét bài toán dưới nhiều góc độ, khai thác các yếu tố đặc trưng hình học của bài toán để tìm lời giải. Trong đó việc hình thành cho học sinh khả năng *tư duy theo các phương pháp giải* là một điều cần thiết. Việc trải nghiệm qua quá trình giải toán sẽ giúp học sinh hoàn thiện kỹ năng định hướng và giải toán.

Cần nhấn mạnh một điều rằng, đa số các học sinh sau khi tìm được một lời giải cho bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng thường không suy nghĩ, đào sâu thêm. Học sinh không chú ý đến bản chất hình học phẳng của bài toán nên mặc dù làm rất nhiều bài toán hình học tọa độ nhưng vẫn không phân loại được dạng toán cơ bản cũng như bản chất của bài toán. Thậm chí một bài toán tương tự nhau xuất hiện trong nhiều đề thi mà học sinh vẫn làm miệt mài như lần đầu tiên giải nó, bởi không nhận biết được dạng toán này đó từng làm?

2. Kết quả, hiệu quả của thực trạng trên

Với thực trạng đã chỉ ra, thông thường học sinh sẽ dễ dàng cho lời giải đối với các bài toán có cấu trúc đơn giản. Còn khi đưa ra bài toán khác một chút cấu trúc cơ bản học sinh thường tỏ ra rất lúng túng và không biết định hướng tìm lời giải bài toán. Từ đó, hiệu quả giải toán của học sinh bị hạn chế rất nhiều.

Trước thực trạng đó của học sinh, tôi thấy cần thiết phải hình thành cho học sinh thói quen xem xét bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng theo bản chất hình học phẳng. Và vì vậy song song với các lời giải cho bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng, tôi luôn yêu cầu học sinh chỉ ra bản chất và bài toán hình phẳng tương ứng, từ đó phân tích ngược lại cho bài toán vừa giải.

Trong sáng kiến kinh nghiệm này tôi sẽ chỉ ra một trong nhiều nội dung được áp dụng có hiệu quả. Việc đưa nội dung này nhằm khai thác các tính chất hình học phẳng để định hướng tìm lời giải bài toán hình học tọa độ và *xem việc chỉ ra bản chất hình học phẳng sẽ hỗ trợ cho giải toán chứ không phải là chúng ta đi giải một bài hình học phẳng*. Qua đó giúp học sinh nhận thức được rằng: “Mỗi bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng luôn chứa đựng một bài toán hình phẳng tương ứng”. Vì vậy phân tích bản chất của bài toán hình học phẳng để hỗ trợ cho việc giải bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng là một suy nghĩ có chủ đích, giúp học sinh chủ động hơn trong việc tìm kiếm lời giải cũng như phân loại một cách tương đối các bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng.

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I CÁC GIẢI PHÁP THỰC HIỆN

1. Tổ chức cho học sinh hình thành kỹ năng giải toán thông qua một (hay nhiều) buổi học có sự hướng dẫn của giáo viên
2. Tổ chức rèn luyện khả năng định hướng giải toán của học sinh. Trong đó yêu cầu khả năng lựa chọn lời giải ngắn gọn trên cơ sở phân tích bài toán hình học phẳng tương ứng.
3. Tổ chức kiểm tra để thu thập thông tin về khả năng nắm vững kiến thức của học sinh.
4. Trong mỗi bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng đều yêu cầu học sinh thực hiện phân tích bản chất hình học phẳng cũng như đưa ra các hướng khai thác mở rộng cho bài toán.
5. Cung cấp hệ thống các bài tập mở rộng để học sinh tự rèn luyện.

II. CÁC BIỆN PHÁP TỔ CHỨC THỰC HIỆN

Nội dung này được triển khai thông qua 3 buổi học (mỗi buổi học 3 tiết):

- Buổi học thứ nhất: Tổ chức thực hiện hình thành kỹ năng giải toán.
- Buổi học thứ hai: Tổ chức cho học sinh rèn luyện kỹ năng giải toán.
- Buổi học thứ ba: Tổ chức kiểm tra để lấy kết quả nội dung triển khai và kỹ năng mà học sinh đạt được.

B.1: Buổi học thứ nhất

Giáo viên nêu vấn đề và định hướng cách suy nghĩ giải toán, giáo viên hướng dẫn làm các ví dụ mẫu 1, 2, 3. Qua đó, bằng cách phân tích trên hình phẳng tương ứng với bài toán, giáo viên phân tích lợi ích của việc “suy nghĩ có định hướng theo bản chất hình học phẳng của bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng” cũng như phân tích cho học sinh thấy rằng việc lựa chọn phương pháp giải không phải là ngẫu nhiên mà luôn chứa đựng những nguyên nhân sâu xa rất bản chất. Đó chính là cấu trúc của bài toán, hình thức của bài toán và các mối quan hệ “tất yếu” giữa các yếu tố tạo nên bài toán. Cũng chính vì điều đó mà việc phân tích bài toán tọa độ trên hình phẳng tương ứng một mặt giúp học sinh hiểu được bản chất của bài toán, mặt khác giúp học sinh biết cách định hướng trong việc tìm lời giải bài toán.

Để buổi học này đạt hiệu quả, tôi đã thực hiện ngay sau khi học xong phần hình học tọa độ trong mặt phẳng ở lớp 10. Để tăng cường tính chủ động cho học sinh trong buổi học thứ nhất tôi đã cung cấp cho học sinh một hệ thống các bài tập đề thi về bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng cho bài học. Yêu cầu học sinh về nhà chuẩn bị lời giải, phân loại các bài toán thành các

nhóm tương tự nhau cũng như trả lời câu hỏi : "bản chất bài toán ấy là gì?, có tổng quát, mở rộng, phân loại dạng toán được không?"

Sau đây là sơ lược của buổi học về nội dung này

*Giáo viên: Bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng xuất hiện thường xuyên trong các đề thi ĐH, đề thi học sinh giỏi với mức độ tương đối khó. Vì vậy để giải được dạng toán này chúng ta cần tìm hiểu bản chất cũng như xây dựng phương pháp tư duy giải toán đặc trưng cho loại toán

Trong buổi học hôm nay chúng ta sẽ cùng nghiên cứu về một phương pháp tư duy giải toán: ***"Phân tích bản chất hình học phẳng trong bài toán hình học tọa độ tương ứng"***

Trước hết ta cần chú ý chuyển bài toán tọa độ về bài toán hình phẳng trên cơ sở các dữ kiện bài toán đã cho.

Sau đó ta sẽ phân tích tính chất hình học trên hình phẳng để định hướng tìm lời giải bài toán.

Các ví dụ

Một bài toán hình học tọa độ có thể được giải theo một trong ba hướng chính sau:

H1: Giải hoàn toàn theo quan điểm hình học giải tích

H2: Giải hoàn toàn theo quan điểm hình học phẳng sau đó áp dụng vào tọa độ

H3: Khai thác các yếu tố hình học phẳng để giải toán hình giải tích

Mỗi hướng giải toán đều có những ưu thế riêng cho từng bài toán nhưng nói chung H3 thường hiệu quả hơn cả.

Thực hành giải toán:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán.

Trên cơ sở dữ kiện và yêu cầu bài toán phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

Bước 2: Lập sơ đồ các bước giải bài toán

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ ở bước 2

Ví dụ 1

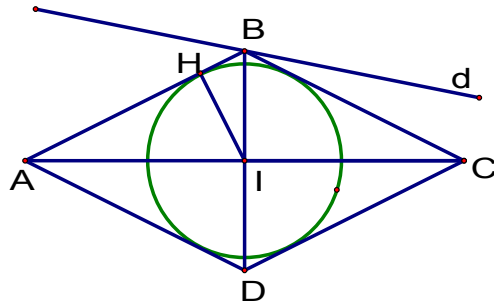
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$. Tìm tọa độ đỉnh A biết $AC=2BD$, điểm B có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$

GV hướng dẫn:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán. Phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

- Kẻ $IH \perp AB \Rightarrow IH$ là bán kính đường nội tiếp hình thoi ABCD
- Biết AIB là tam giác vuông tại I có đường cao IH
- Ta có $AC = 2BD \Rightarrow AI = 2BI$

Vậy tính được IB, IA



Bước 2: Lập sơ đồ các bước giải bài toán

- + Tính IH, IB, IA
- + Gọi toạ độ B và tìm B
- + Lập pt AC, gọi toạ độ A và tìm A

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ ở bước 2

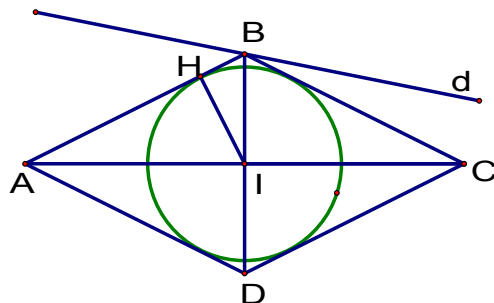
Đường tròn (C) có tâm I(1;-1), bán kính

$$R = 2\sqrt{5}$$

Đặt $BI = x, (x > 0)$

Do $AC = 2BD \Rightarrow AI = 2BI = 2x$

Kẻ $IH \perp AB \Rightarrow IH = R = 2\sqrt{5}$



$$\text{Trong } \triangle AIB \text{ có: } \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow x = 5 \text{ (Do } x > 0)$$

Suy ra $IB = 5$. Gọi $B(t; 2t - 5), (t > 0)$

$$\text{Do } IB = 5 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t-4)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 & (tm) \\ t = \frac{-2}{5} & (ktm) \end{cases} \quad \text{Với } t = 4 \Rightarrow B(4; 3)$$

Đường thẳng AC qua I, nhận $\vec{IB}(3;4)$ làm véc tơ pháp tuyến $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AC là

$$\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = -1 - 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } A(1 + 4s; -1 - 3s)$$

Ta có: $IA = 10 \Leftrightarrow (4s)^2 + (-3s)^2 = 10^2 \Leftrightarrow s = 2 \text{ hoặc } s = -2$

Vậy: $A(9; -7)$ hoặc $A(-7; 5)$

Phân tích bài toán

Bài toán hình phẳng tương ứng

Trong mặt phẳng cho đường tròn $C(I;R)$ và đường thẳng d . Nêu cách dựng hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $C(I;R)$ sao cho $AC=2BD$, biết điểm B thuộc đường thẳng d

Rõ ràng giải bài hình phẳng này không đơn giản nhưng việc giải nó thực sự là không cần thiết, vì chúng ta cần giải bài toán tọa độ chứ không phải bài toán hình phẳng này. Đây cũng là một chú ý rất quan trọng trong tư duy giải toán chúng ta đang tiếp cận theo H3: ***"phân tích bản chất hình học phẳng để định hướng giải toán trong bài toán hình học tọa độ"***

Chúng ta không giải bài toán hình phẳng và cũng không phải phát biểu bài toán hình phẳng tương ứng nếu điều đó không cần thiết cho việc giải toán.

Ví dụ 2

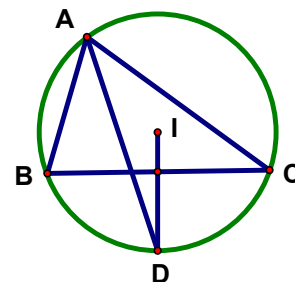
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Tìm tọa độ đỉnh B biết $A(1;0), C(1+\sqrt{2}; \sqrt{2}-2), D(3;-2)$

GV hướng dẫn:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán. Phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

- Phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D nên D là điểm chính giữa cung BC, do đó $BC \perp ID$

- Lập BC rồi suy ra B



Bước 2: Lập sơ đồ các bước giải bài toán

+ Lập Pt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

+ Chứng minh $BC \perp ID$

+ Lập pt BC rồi tìm B

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ ở bước 2

Pt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (C)

Vì (C) qua A, C, D nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 1 + 2a + c = 0 \\ 9 - 2\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2})a + 2(\sqrt{2} - 2)b + c = 0 \\ 13 + 6a - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$

Phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D nên D là điểm chính giữa cung BC, do đó $BC \perp ID$

Đường thẳng BC qua C, nhận $\vec{ID}(2; 0)$ làm véc tơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC là: $x = 1 + \sqrt{2}$

$$\text{Toạ độ B là nghiệm hệ: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x = 1 + \sqrt{2}; y \neq -2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} - 2 \end{cases} \quad (\text{Vì } y_B \neq y_C)$$

Vậy: $B(1 + \sqrt{2}; -\sqrt{2} - 2)$

Phân tích bài toán:

Bài toán hình phẳng tương ứng

Trong mặt phẳng cho ba điểm không thẳng hàng A, C, D. Dựng điểm B sao cho tam giác ABC nhận AD làm phân giác trong góc A của tam giác ABC và D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Với bài toán này sự xuất hiện của tính chất hình phẳng thực sự là hữu ích nó là mấu chốt để giải quyết bài toán. Nếu học sinh không phát hiện được tính chất "D là điểm chính giữa cung BC, do đó $BC \perp ID$ " thì không giải được bài toán

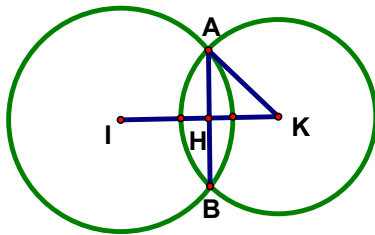
Ví dụ 3 sau đây chỉ ra rằng : **Khi khai thác tính chất hình học phẳng nếu không cẩn thận học sinh rất dễ mắc sai lầm khi không xét hết các trường hợp có thể xảy ra của hình phẳng**

Ví dụ 3

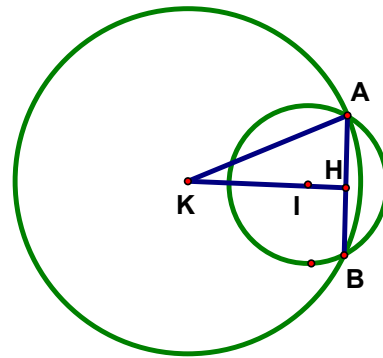
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm K(1;3) cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 4, với I là tâm của đường tròn (C).

GV hướng dẫn:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán. Phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.



Hình 1



Hình 2

Ở bước này đa số học sinh chỉ vẽ hình cho trường hợp 1 mà quên mất trường hợp 2 khi giải toán.

Bước 2: Lập sơ đồ các bước giải bài toán

+ Từ giả thiết diện tích tam giác IAB bằng 4, tính AH

+ Tính KA và lập (K)

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán theo sơ đồ ở bước 2

Đường tròn (C) có tâm I(1;-2) bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm AB.

$$\text{Khi đó } S_{ABI} = IH \cdot AH \Leftrightarrow 4 = \sqrt{R^2 - AH^2} \cdot AH \Leftrightarrow 16 = (8 - AH^2) \cdot AH^2 \Leftrightarrow AH^2 = 4 \Leftrightarrow AH = 2$$

Ta có :

Trường hợp 1: I, K nằm khác phía so với đường thẳng AB

$$\text{Ta có: } AK = \sqrt{HA^2 + KH^2} = \sqrt{HA^2 + (KI - IH)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Do đó đường tròn cần tìm có phương trình. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Trường hợp 2: I, K nằm cùng phía so với đường thẳng AB

$$\text{Ta có } AK = \sqrt{HA^2 + KH^2} = \sqrt{HA^2 + (KI + IH)^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

Do đó đường tròn cần tìm có phương trình. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 53$.

Nhận xét:

Sau khi học sinh đã tiếp cận với các bước giải, bước 1 và 2 được định hướng ta sẽ trình bày lời giải bài toán để rút gọn thời gian giải toán

Ví dụ 4 sau đây về một bài toán có thể giải hoàn toàn bằng hình học tọa độ và nó tỏ ra *ưu thế hơn* khi giải nó theo quan điểm hình học phẳng. Từ bài toán này để chỉ ra cho học sinh thấy rằng: "**Không có phương pháp giải toán nào là tối ưu cho mọi bài toán, mỗi bài toán và phương pháp giải toán tương thích và trở nên tối ưu trong những mối quan hệ ràng buộc cụ thể**", từ đó giúp học sinh linh động hơn trong quá trình giải toán

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm tọa độ điểm N nằm trên (C) sao cho MN có độ dài lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Lời giải 1: Giải bài toán theo quan điểm hình học phẳng

TH1: M nằm trên (C)

Khi đó:

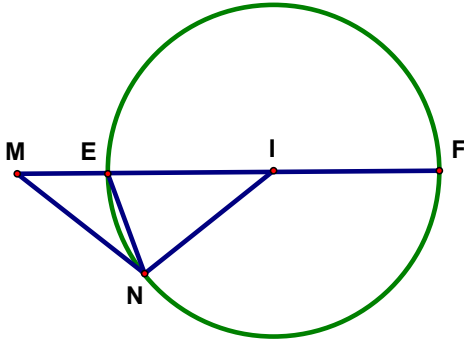
+ MN có độ dài nhỏ nhất bằng 0, khi N trùng M.

+ MN có độ dài lớn nhất bằng 2R, khi N là đầu mút còn lại của đường kính MN

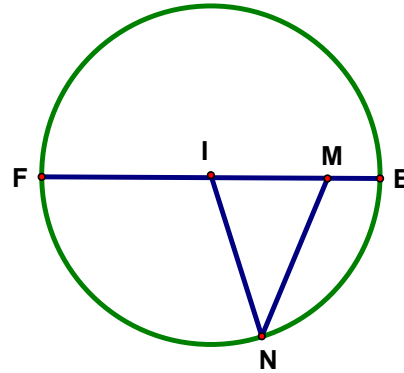
TH2: M không nằm trên (C)

Gọi I là tâm (C) và E, F là giao điểm của IM với (C) sao cho: $ME < MF$.

Ta có hai trường hợp hình vẽ sau:



Hình 1



Hình 2

Ta chứng minh được: $ME \leq MN \leq MF$ với mọi điểm N nằm trên (C)

Khi đó:

+ MN có độ dài nhỏ nhất bằng ME, khi N trùng E.

+ MN có độ dài lớn nhất bằng MF, khi N trùng F

Lời giải 2: Giải bài toán theo quan điểm hình học giải tích

Gọi $N(x;y)$, ta có: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$MN^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - a + a - x_0)^2 + (y - b + b - y_0)^2$$

$$MN^2 = R^2 + IM^2 + 2[(x - a)(a - x_0) + (y - b)(b - y_0)]$$

Theo BĐT Bunhiacopski, ta có:

$$[(x - a)(a - x_0) + (y - b)(b - y_0)]^2 \leq R^2 \cdot IM^2$$

$$\Leftrightarrow -R \cdot IM \leq [(x - a)(a - x_0) + (y - b)(b - y_0)] \leq R \cdot IM$$

Vậy:

$$R^2 + IM^2 - 2R \cdot IM \leq MN^2 \leq R^2 + IM^2 + 2R \cdot IM \Leftrightarrow (R - IM)^2 \leq MN^2 \leq (R + IM)^2$$

$$\Leftrightarrow |R - IM| \leq MN \leq R + IM, \forall N \in (C)$$

Khi đó:

+ MN có độ dài nhỏ nhất bằng $|R - IM|$, khi N(x;y) được xác định theo nghiệm hệ pt:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2; \frac{x-a}{a-x_0} = \frac{(y-b)}{b-y_0} \\ -R.IM = (x-a)(a-x_0) + (y-b)(b-y_0) \end{cases}$$

+ MN có độ dài lớn nhất bằng $R + IM$, khi N(x;y) được xác định theo nghiệm hệ pt:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2; \frac{x-a}{a-x_0} = \frac{(y-b)}{b-y_0} \\ R.IM = (x-a)(a-x_0) + (y-b)(b-y_0) \end{cases}$$

Nhận xét:

Đây là bài toán tổng quát, khi có giả thiết cụ thể để giải theo hình phẳng học sinh chỉ việc xét vị trí tương đối của M và (C), rồi giải theo trường hợp tương ứng. Tuy nhiên lời giải theo hình tọa độ *thực sự là rất ấn tượng*, nó giúp cho học sinh tư duy toàn diện hơn.

Cuối buổi học tôi đưa ra một số bài toán mà sự xuất hiện của lời giải hình học phẳng là **bắt buộc**, nó là một phần tất yếu cấu thành nên lời giải bài toán, nếu học sinh không có kĩ năng chuyển và giải bài toán hình học phẳng tương ứng chắc chắn sẽ rất khó khăn khi tìm lời giải.

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;-3)$, trọng tâm $G(-3;5)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Phân tích bài toán:

Đây là một kết quả rất quen thuộc trong hình học phẳng, đó là bài toán về đường thẳng **Euler**:
"Trong tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp I thẳng hàng và $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ "

Lời giải bài toán

Bước 1: Chứng minh bài toán hình phẳng vừa nêu

Bước 2: Áp dụng: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ ta tìm được tọa độ I

B.2: BUỔI HỌC THỨ HAI

Với sự chuẩn bị của học sinh, giáo viên yêu cầu học sinh trình bày lời giải theo định hướng đã lựa chọn. Tuy nhiên vẫn khuyến khích sử dụng các phương pháp khác để có lời giải đa dạng.

Sau đây là sơ lược về hệ thống các bài toán rèn luyện và lời giải sơ lược theo phương pháp đưa ra.

1. Bài toán 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại B có $AC = 2$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC có phương trình (d): $y = \sqrt{3}x$. Tìm tọa độ đỉnh A, C biết khoảng cách từ C đến (d) gấp hai lần khoảng cách từ B đến (d); C nằm trên trục tung và A có hoành độ dương.

Lời giải sơ lược

Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán. Phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

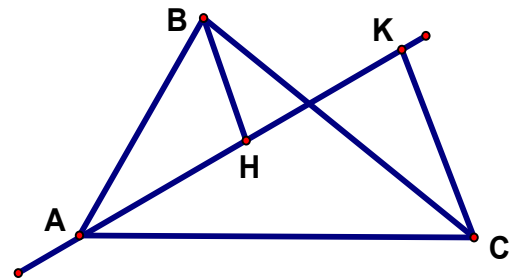
HS1: Ý tưởng giải toán

Ta có:

$$+ \frac{BH}{AB} = \sin BAH = \sin KAC = \frac{CK}{AC} \Rightarrow AB = 1$$

$$+ AB = 1, CB = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BAC = 60^\circ \Rightarrow KAC = 30^\circ \Rightarrow CK = 1$$



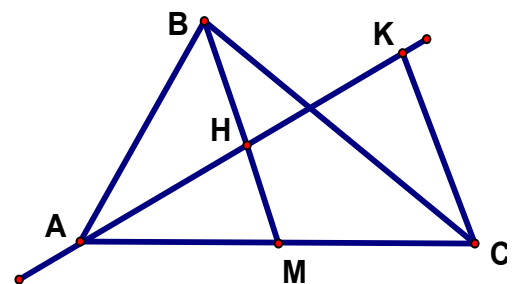
HS2: Ý tưởng giải toán

Lấy M đối xứng với B qua (d) ta có M thuộc AC

$$\text{Vì } CK = 2BH \text{ nên } HM = \frac{1}{2}CK$$

$$\text{Khi đó M là trung điểm AC} \Rightarrow MB = \frac{1}{2}AC = 1$$

$$\Rightarrow CK = MB = 1$$

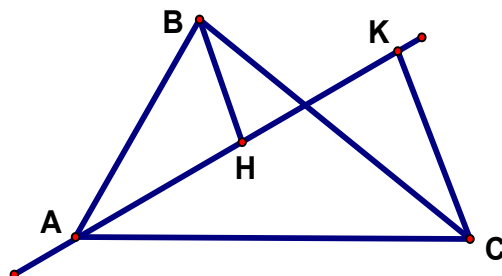


HS3: Ý tưởng giải toán

Ta có:

$$\Delta ABH \text{ đồng dạng } \Delta ACK \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CK} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 1 \Rightarrow CK = 1$$



Nhận xét 1:

Đây là bài toán thu được nhiều ý tưởng giải toán rất hay từ học sinh, học sinh cũng sôi nổi và mạnh dạn hơn trong cách trình bày tư tưởng giải toán. Điều đó cho thấy hiệu quả của việc "Giải toán tọa độ theo tư tưởng phân tích hình phẳng tương ứng"

2. Bài toán 2

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn

(T): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y = 0$.

Biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC (với I là tâm của đường tròn (T)) và điểm A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng BC.

Lời giải sơ lược

Gọi d là đường phân giác trong của góc A

Đường tròn (T) có tâm I(2;1), bán kính $R = \sqrt{5}$

Khi đó đường thẳng d cắt đường tròn (T) tại A và A' có

tọa độ là nghiệm của hệ

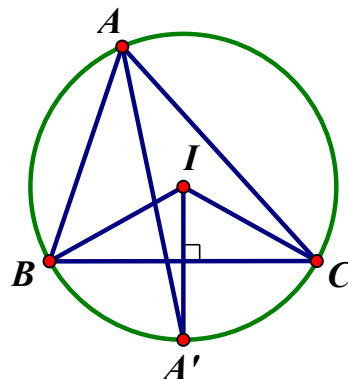
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Điểm A có tung độ dương suy ra A(3;3) và A'(0;0)

Vì d là phân giác trong của góc A nên $\widehat{BA'} = \widehat{CA'} \Rightarrow IA' \perp BC$

Phương trình đường thẳng BC có dạng: $BC: 2x + y + m = 0$

$$S_{ABC} = 3S_{IBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A, BC).BC = 3 \cdot \frac{1}{2}d(I, BC).BC \Leftrightarrow d(A, BC) = 3.d(I, BC)$$



$$\frac{|m+9|}{\sqrt{5}} = 3 \cdot \frac{|m+5|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m+9| = 3|m+5| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -6 \end{cases}$$

. Với $m = -3$ khi đó $BC: 2x + y - 3 = 0$

Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5}; \frac{3+2\sqrt{21}}{5}\right), \left(\frac{6+\sqrt{21}}{5}; \frac{3-2\sqrt{21}}{5}\right)$, suy ra B, C

nằm khác phía đối với đường thẳng d (TM)

. Với $m = -6$ khi đó $BC: 2x + y - 6 = 0$

Tọa độ các điểm B, C là: $\left(\frac{12-2\sqrt{6}}{5}; \frac{6+4\sqrt{6}}{5}\right), \left(\frac{12+2\sqrt{6}}{5}; \frac{6-4\sqrt{6}}{5}\right)$, suy ra B, C

nằm khác phía đối với đường thẳng d (TM)

Do đó phương trình đường thẳng BC là: $2x + y - 3 = 0$ và $2x + y - 6 = 0$.

Nhận xét 2:

Đây là bài toán mà khi giải toán bằng hình phẳng học sinh đã biết xét hai trường hợp: A, I cùng phía hoặc khác phía so với BC . Điều này cho thấy *tư duy của học sinh đã hoàn thiện hơn* sau buổi học thứ nhất.

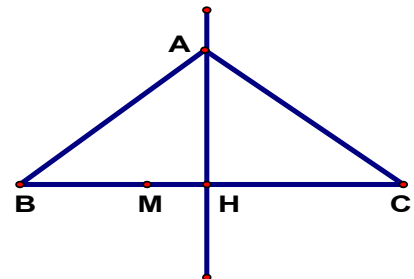
3. Bài toán 3

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có phương trình $AB: x + 2y - 2 = 0, AC: 2x + y + 1 = 0$, điểm $M(1; 2)$ thuộc đoạn thẳng BC . Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải sơ lược

HS1: Ý tưởng giải toán

- + Lập pt các đường phân giác góc tạo bởi AB, AC .
- + Lập pt BC qua M , vuông góc phân giác vừa tìm.
- + Tìm B, C và kiểm tra M có thuộc đoạn BC



+Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = x^2 + (y - 3)^2 - 32 \geq -32$.

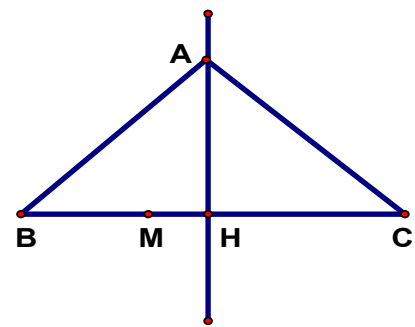
HS2: Ý tưởng giải toán

+ Lập pt đường phân giác góc tạo bởi AB, AC và có chứa điểm M bằng cách xét cùng phía, khác phía so với AB, AC

+ Lập pt BC qua M, vuông góc phân giác vừa tìm.

+ Tìm B, C

+Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = x^2 + (y - 3)^2 - 32 \geq -32$.



HS3: Ý tưởng giải toán

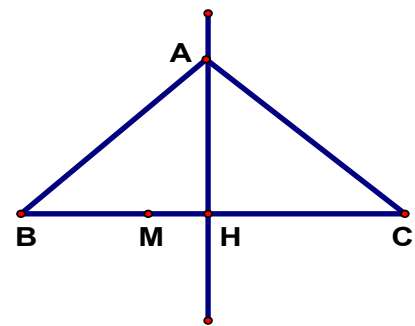
+ Gọi $B(2 - 2t; t)$,

+ M thuộc đoạn BC nên $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MB}, k < 0$

$$\Rightarrow C(k - 2s + 1; -2k + s + 2), s = kt$$

+ Giải hệ:
$$\begin{cases} C \in AC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow t, s \Rightarrow t, k \Rightarrow B, C$$

+Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = x^2 + (y - 3)^2 - 32 \geq -32$.



Nhận xét 3:

Bài toán này, đa số học sinh chọn hướng giải theo hình tọa độ. Điều này cho thấy **học sinh đã biết lựa chọn phương pháp giải tương thích cho mỗi bài toán** và sự linh động trong tư duy giải toán của học sinh

4. Bài toán 4

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(7;10)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng Δ lớn nhất.

Lời giải

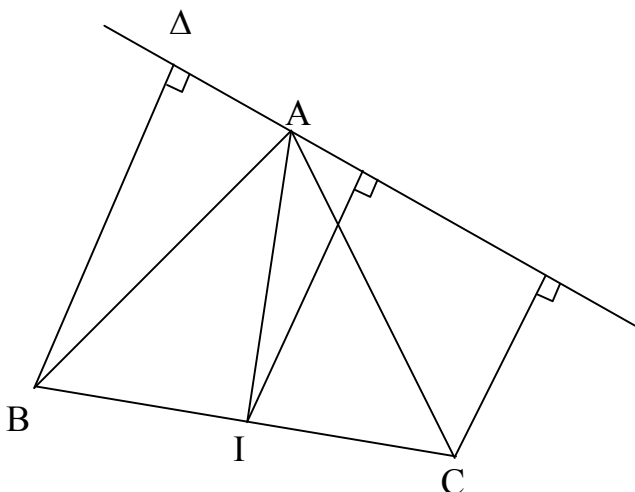
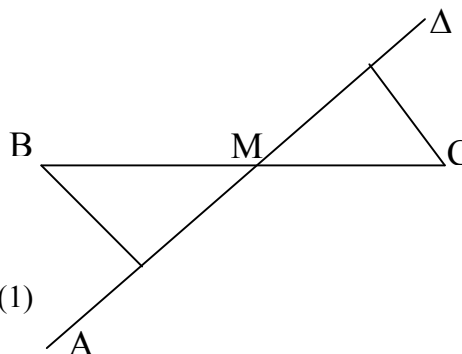
TH1: Δ cắt đoạn thẳng BC tại M

Ta có: $d(B; \Delta) + d(C; \Delta) \leq BM + CM = BC$ (1)

TH2: Δ không cắt đoạn thẳng BC , gọi $I(5;6)$ là trung điểm BC

Ta có:

$d(B; \Delta) + d(C; \Delta) = 2d(I; \Delta) \leq 2AI$ (2)



Vì $BC = \sqrt{80} < 2\sqrt{41} = 2AI$ nên từ (1) và (2) ta có:

$d(B; \Delta) + d(C; \Delta)$ lớn nhất bằng $2AI = 2\sqrt{41}$ khi Δ vuông góc với AI

$\Rightarrow \Delta$ đi qua $A(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AI} = (4;5)$ là véc tơ pháp tuyến

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: 4(x-1) + 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 4x + 5y - 9 = 0$

Nhận xét 4:

Đây là bài toán yêu cầu học sinh từ giả thiết bài toán phải xây dựng được đầy đủ các trường hợp hình phẳng tương ứng. Qua bài toán này học sinh nhận thấy rằng lựa chọn giải theo hình học phẳng là **tối ưu** hơn xét hàm số hoặc đánh giá Bất đẳng thức cho bài toán này.

B.3:BUỔI HỌC THỨ BA

Đây là buổi học mà giáo viên tổ chức cho học sinh kiểm tra để thu thập thông tin. Đề kiểm tra sau đây được thực hiện trong thời gian 90 phút.

1. Đề thi

Câu 1: Tìm ít nhất hai lời giải cho bài toán sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình:

$(x-4)^2 + y^2 = 4$. Gọi A, B là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) với M là điểm nằm trên trục tung. Tìm tọa độ điểm M biết đường thẳng AB đi qua điểm E(8;5).

Câu 2: Giải bài toán sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng có phương trình:

$d_1: x + 2y - 1 = 0; d_2: x + 2y - 3 = 0$ và hai điểm $A(-2;-3); B(1;3)$. Tìm tọa độ điểm $M \in d_1; N \in d_2$ sao cho độ dài đường gấp khúc AMNB ngắn nhất.

Phát biểu các bài toán hình học phẳng liên quan

2. Một số kết quả sau bài kiểm tra

* Đối với câu 1 học sinh thực theo nhiều cách khác nhau, tuy nhiên chủ yếu là sử dụng các tính chất hình học khác nhau để lập phương trình AB:

+ Xem $AB = (C) \cap (T)$, trong đó (T) là đường tròn đường kính IM

+ Xem $AB = (C) \cap (T)$, trong đó (T) là đường tròn bán kính $MA = \sqrt{IM^2 - R^2}$

+ Tìm tọa độ $H = AB \cap IM$

* Đối với câu 2, học sinh phát hiện được bài toán **hình phẳng góc** và các bài toán phát triển của nó, cụ thể là:

+ Bài toán gốc: "Cho hai điểm cố định A, B không nằm trên đường thẳng d cho trước. Tìm trên d điểm M sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất"

+ Bài toán 1: " Cho hai điểm cố định A, B nằm cùng phía so với hai đường thẳng song song $d_1; d_2$ cho trước. Tìm trên d_1 điểm M, trên d_2 điểm N sao cho độ dài đường gấp khúc AMNB ngắn nhất "

+ Bài toán 2: " Cho điểm cố định A không nằm trên đường thẳng d cho trước. Tìm trên d hai điểm M, N sao cho $MN = a$ và chu vi tam giác ABC nhỏ nhất"

+ Bài toán 3: " Cho hai điểm cố định A, B và song song với đường thẳng d cho trước. Tìm trên d điểm M sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MAB ngắn nhất "

* Thông qua bài kiểm tra này cũng như thực hành cho hệ thống các bài tập trước đó, học sinh nhận ra một điều rất quan trọng: "Bài toán có nhiều hướng để lựa chọn lời giải, tuy nhiên căn cứ vào hình phẳng tương ứng của bài toán là một dữ kiện quan trọng để đi đến lời giải tối ưu". Đó cũng chính là mục đích của SKKN nhằm cho học sinh thấy rằng bản chất của hình học tọa độ là một bài toán hình phẳng tương ứng và vấn đề của chúng ta là phải biết khai thác tính chất hình học phẳng ấy sao cho tối ưu nhất.

C. KẾT LUẬN

I. Kết quả thu được

Sau đây là bảng số liệu thu được trước buổi học thứ hai của lớp 10A2 (năm học 2012 - 2013)

Phương pháp Bài toán	P1	P2	P3	T
Bài toán 1	0	2	46	46
Bài toán 2	32	1	42	46
Bài toán 3	48	1	40	50
Bài toán 4	5	2	48	50

Ghi chú: P1 là phương pháp tọa độ thuần túy

P2 là phương pháp hình học phẳng thuần túy

P3 là phương pháp kết hợp khai thác hình phẳng tương ứng.

T là tổng số học sinh giải được bài toán

Qua bảng số liệu ta thấy rằng số lượng học sinh sử dụng phương pháp 3 chiếm số lượng lớn và dải đều cho cả 4 bài toán. Điều đó cho thấy tính phổ dụng trong giải toán hình học tọa độ của phương pháp 3. Việc đưa thêm phương pháp giải toán chỉ là một công cụ bổ sung tư duy cho học sinh chứ không phải là công cụ thay thế. Vì vậy khi đưa ra một bài toán tôi thường thu được các lời giải rất đa dạng từ học sinh, chẳng hạn bài toán 3 của buổi học thứ hai.

Có một lớp đối chứng của năm học trước đó lớp 10A2 năm học 2011 -2012. Tôi cũng thực hiện với hệ thống bài tập như thế nhưng không đề cập tới cấu trúc lý thuyết của phương pháp 2, phương pháp 3 . Kết quả so sánh về sử dụng phương pháp giải và kết quả bài thi thể hiện ở các bảng sau:

Lớp	P1	P2	P3
10A2 (11 -12)	82%	35%	40%
10A2 (12 - 13)	82%	75%	80%

Điểm kiểm tra	9 ÷ 10	7 ÷ 8	5 ÷ 6.5	Dưới 5
Lớp				
10A2 (11 -12)	2	23	20	5
10A2 (12 - 13)	8	24	11	5

Thông qua bảng số liệu có thể khẳng định một điều: Việc triển khai các buổi học mở rộng mang lại hiệu quả rất nhiều. Và điều này sẽ càng phù hợp hơn đối với chương trình SGK mới, nó có thể được thực hiện rất tốt cho các chuyên đề tự chọn của học sinh. Đó cũng là điều mong mỏi của tôi khi viết SKKN này. Mong muốn có những chủ đề tự chọn của học sinh vừa bám sát chương trình học – thi, vừa có thể cung cấp cho các em một hệ thống các tri thức phương pháp .

Không những giúp học sinh trong việc định hướng giải toán với một nội dung cụ thể mà thông qua đó để học sinh thấy được rằng việc đi theo “ con đường” này là rất tốt và có kết quả. Từ đó thôi thúc học sinh tìm tòi sáng tạo để trang bị cho mình những quy trình và lượng kiến thức cần thiết.

Nhìn chung vì quy trình đưa ra là đơn giản và có thể áp dụng cho phần nhiều cho các bài toán. Do đó đa số các học sinh nắm vững được quy trình và có định hướng rõ rệt trong quá trình giải toán. Tuy nhiên đối với một số học sinh trung bình và trung bình khá thì khả năng vận dụng vào giải toán còn đang lúng túng, nhất là trong các bài toán cần phải tạo ra các hình vẽ phụ, yếu tố phụ hay khi gặp bế tắc trong giải toán học sinh thường không chuyển hướng được cách suy nghĩ để giải bài toán (thể hiện sức “ỳ” tư duy vẫn còn lớn). Vì vậy khi dạy cho học sinh nội dung này, giáo viên cần tạo ra cho học sinh cách suy nghĩ linh hoạt và sáng tạo trong khi vận dụng quy trình . Đó cũng chính là nhược điểm của cách giải toán theo phương pháp này, điều đó đòi hỏi

người giáo viên cần phải khéo léo truyền thụ quy trình và cách giải toán linh hoạt đối với các bài toán.

II. Kiến nghị

Qua sự thành công bước đầu của việc áp dụng nội dung này thiết nghĩ rằng chúng ta cần thiết phải có sự đổi mới trong cách dạy và học. Không nên dạy học sinh theo những quy tắc máy móc nhưng cũng cần chỉ ra cho học sinh những quy trình mô phỏng đang còn mang tính chọn lựa để học sinh tự mình tư duy tìm ra con đường giải toán.

Sáng kiến kinh nghiệm này chỉ là một phần rất nhỏ nó là kinh nghiệm bản thân thu được qua quá trình dạy một phạm vi học sinh nhỏ hẹp. Vì vậy sự phát hiện những ưu nhược điểm chưa được đầy đủ và sâu sắc.

Mong rằng qua báo cáo kinh nghiệm này các đồng nghiệp cho tôi thêm những ý kiến và phản hồi những ưu nhược điểm của cách dạy nội dung này. Cuối cùng tôi mong rằng nội dung này sẽ được các đồng nghiệp nghiên cứu và áp dụng vào thực tiễn dạy học để rút ra những điều bổ ích.

Bài viết chắc chắn còn nhiều thiếu sót rất mong được sự đóng góp ý kiến, phê bình, phản hồi của các đồng nghiệp

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh Hóa, ngày 16 tháng 5 năm 2013

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

Lê Văn Lâm