

Toán 12

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

**Nguyên hàm**

# Bài toán vật lý

- Ta đã biết bài toán chất điểm chuyển động thẳng có phương trình  $s=f(t)$  với  $f(t)$  là hàm số có đạo hàm.
- Khi đó vận tốc tại thời điểm  $t$  là  $v(t)=f'(t)$
- Trong thực tế có khi ta gặp bài toán ngược là biết vận tốc  $v(t)$  tìm phương trình chuyển động  $s=f(t)$ .

*Từ đó ta có bài toán: Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(a;b)$ , tìm hàm số  $F(x)$  sao cho trên khoảng đó:  $F'(x)=f(x)$ .*

# &1. NGUYÊN HÀM

**I. Nguyên hàm và tính chất :**

**II. 1. Nguyên hàm :**

**a. Định nghĩa:**

Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$ .

Hàm số  $F(x)$  gọi là nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $K$ .

Hàm số  $f(x) = 2x$  có nguyên hàm là những hàm số nào?

a.  $F(x) = x^2$

b.  $F(x) = x^2 + 3$

c.  $F(x) = x^2 - 4$

☒ d. Tất cả các hàm số trên

**Hãy chọn phương án đúng**

# Nhận xét

- Mọi hàm số dạng  $F(x)=x^2+C$  ( $C$  là hằng số tùy ý) đều là nguyên hàm của hàm số  $f(x)=2x$  **Trên  $\mathbf{R}$ .**
- Mọi hàm số  $G(x)=\operatorname{tg}x+C$  ( $C$  là hằng số tùy ý) đều là nguyên hàm của hàm số  
**trên các khoảng xác định.**

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tổng quát ta có định lý:

## ***b.Định lý:***

- Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $K$  thì:
  - \*Với mọi hằng số  $C$ ,  $F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng đó.
  - \*Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $(a;b)$  đều có thể viết dưới dạng  $F(x)+C$  với  $C$  là một hằng số.

$F(x) + C$  ( $C$  thuộc  $\mathbb{R}$ ) gọi là họ các nguyên hàm của  $f(x)$

kí hiệu : 
$$\int f(x).dx = F(x) + C$$

## 2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1 :  $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2 :  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx + C..(k \neq 0)$

Tính chất 3 :  $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

### 3. Sự tồn tại nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ .

### 4. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$$1. \int 0 \, dx = C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$3. \int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$$4. \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

$$5. \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$5. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$7. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

VD: Tính nguyên hàm

$$\begin{aligned} 1. \int (3x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx &= 3 \int x^3 dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{3}{4} x^4 + 2 x^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int (2\sin x - 2^{x+1}) dx &= 2 \int \sin x dx - 2 \int 2^x dx \\ &= -2 \cos x - 2 \frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int 2 \sin 2x \cdot \cos x dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 (\int \sin x dx + \int \sin 3x dx) \\ &= -\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + C \end{aligned}$$

## ***Qua bài học ta đã biết***

- ***Định nghĩa nguyên hàm từ đó biết cách chứng minh 1 hàm số là nguyên hàm của 1 hàm số cho trước.***
- ***Tìm họ các nguyên hàm bằng cách tìm 1 nguyên hàm rồi cộng thêm hằng số C.***

**VD 2:**

Chứng minh rằng:

$$\int \tan^2 x \cdot dx = \tan x - x + C$$

**Ta có:**

$$\int \tan^2 x \cdot dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx$$

$$= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$$

Hàm số  $F(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$  là nguyên

hàm của hàm số nào sau đây?

a.  $f_1(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

c.  $f_3(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

b.  $f_2(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

d.  $f_4(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

2. Xác định a để hàm số  $F(x) = \frac{ax+1}{x-1}$  là

một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

trên  $R \setminus \{1\}$

Ta có 
$$F'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-a-1}{(x-1)^2}$$

Suy ra :  **$-a - 1 = 1$**       **Vậy  $a = -2$**

3. Cho  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$  và  $F(x) = (ax+b)\sqrt{2x+1}$

Xác định a, b để  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

**GIẢI:**

$$\begin{aligned} F'(x) &= a \cdot \sqrt{2x+1} + (ax+b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{a(2x+1) + ax + b}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3ax + a + b}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} 3a = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

4. Xác định  $a, b, c$  sao cho hàm số

$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  là một nguyên hàm

của hàm số  $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$  trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

a.  $f_1(x) = \sqrt{x}$

b.  $f_2(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c.  $f_3(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

d.  $f_4(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

Bài tập:

Tìm  $F(x)$  biết  $F(x) = \int 2x dx$   $F(1)=3$ .

Hướng dẫn:

$$F(x)=x^2+C$$

$$\text{Mà } F(1)=3 \Rightarrow 1+C=3 \Rightarrow C=2$$

$$\text{Vậy } F(x)=x^2+2$$

## II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

### 1. Phương pháp đổi biến số:

a. Định lý 1: Nếu

và  $u = u(x)$  là hàm số có  
đạo hàm liên tục thì:

$$\int f(u)dx = F(u) + C$$

$$\int f(u)u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

b. Phương pháp:

B1: đặt  $u = u(x)$

B2: tính  $du = u'(x)dx$

B3: tính

$$\int f(u)u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

**VD: Tính các nguyên hàm sau:**

1.  $\int (2x + 1)^5 dx$

B1: Đặt  $u = 2x+1$

B2:  $du = 2dx$

B3:

$$\begin{aligned} \int (2x + 1)^5 dx &= \int u^5 \cdot \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{12} u^6 + C = \frac{1}{12} (2x+1)^6 + C \end{aligned}$$

**VD: tính các nguyên hàm sau**

2.  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} . dx$

B1: Đặt  $u = x^3 + 5$

B2:  $du = 3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$

B3:  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} . dx = \int \sqrt{u} . \frac{du}{3}$

$$= \frac{2}{9} \int u^{\frac{1}{2}} . du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

## Cách 2 VD: tính các nguyên hàm sau

$$2. \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} . dx$$

$$\text{B1: đặt } u = \sqrt{x^3 + 5} \quad \Rightarrow u^2 = x^3 + 5$$

$$\text{B2: } 2u . du = 3x^2 dx \quad \Rightarrow x^2 dx = \frac{2u . du}{3}$$

$$\text{B3: } \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} . dx = \int u . \frac{2u . du}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \int u^2 . du = \frac{2}{9} u^3 + C = \frac{2}{9} (x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

**VD: Tính các nguyên hàm sau**

3.  $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$

B1: đặt  $u = \sin x$

B2:  $du = \cos x \cdot dx$

B3:  $\int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cos x \cdot dx$

$$= \int u^2 (1 - u^2) \cdot du = \int (u^2 - u^4) du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

A stack of four books is shown, slightly offset to the right. The books have yellowed, aged pages. The top book has a light-colored cover, the second has a darker cover, the third has a red cover, and the bottom book has a dark cover. The text "KẾT THÚC" is overlaid in the center in a blue, 3D, sans-serif font. The background is a warm, golden-brown gradient, and the lighting is soft, coming from the upper left, creating a gentle glow on the books and the text.

**KẾT THÚC**