

CHƯƠNG III

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1: NGUYÊN HÀM

Bài 1: NGUYÊN HÀM

1./ Khái niệm nguyên hàm

2./ Nguyên hàm của một số hàm thường gặp

3./ Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

1./ Khái niệm nguyên hàm

VD: Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ nếu:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = \cos x$

Giải :

a) Ta có $(x^2)' = 2x$

nên $F(x) = x^2$

b) Ta thấy $(\sin x)' = \cos x$

nên $F(x) = \sin x$

khi đó ta nói $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$

1./ Khái niệm nguyên hàm

Định nghĩa: Kí hiệu K là khoảng hay đoạn hay nửa khoảng. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Câu hỏi :

1. Hàm số $y = \tan x$ là nguyên hàm của hàm số nào ?
2. Hàm số $y = \log x$ là nguyên hàm của hàm số nào ?

Trả lời :

1. Hàm số $y = \tan x$ là nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. Hàm số $y = \log x$ là nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x \ln 10}$

1./ Khái niệm nguyên hàm

Chú ý:

- Trong trường hợp $K = [a;b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \quad \text{hay} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

- Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu F là nguyên hàm của f trên $(a;b)$ thì có thể chứng minh được rằng:

$$F'(a) = f(a) \text{ và } F'(b) = f(b)$$

Do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$.

1./ Khái niệm nguyên hàm

ĐỊNH LÝ 1

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Ngược lại, với mỗi nguyên hàm $G(x)$ của hàm số f trên cũng tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

1./ Khái niệm nguyên hàm

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì họ nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) + C$ và kí hiệu là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

trong đó $f(x)dx$ là vi phân của $F(x)$.

Ký hiệu trên còn dùng chỉ một nguyên hàm bất kỳ của hàm số f .

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

2./ Nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$$\int 0 dx = C$$

$$\int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

2./ Nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$$\int \sin(kx + b) dx = -\frac{\cos(kx + b)}{k} + C, k \neq 0.$$

$$\int \cos(kx + b) dx = \frac{\sin(kx + b)}{k} + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

3./ Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

Định lý 2: Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K , với a là số thực khác 0 thì:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

Chú ý:

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$$

$$\int f(t)dt = F(t) + C$$

$$\Rightarrow \int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

3./ Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

Chú ý: Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì

$$\begin{aligned}\int f(ax + b)dx &= \frac{1}{a} \int f(ax + b)d(ax + b) \\ &= \frac{1}{a} F(ax + b) + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

$$\int \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

Hỏi nhanh: mệnh đề nào sau đây sai:

A. $\int e^x dx = e^x + C$

B. $\int 2dx = 2x + C$

C. $\int \sin x dx = \cos x + C$

D. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{5x}$$

Giải

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{5x} = x^{\frac{1}{2}} + (3x)^{\frac{1}{3}} + (5x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\int f(x)dx = \int [x^{\frac{1}{2}} + (3x)^{\frac{1}{3}} + (5x)^{\frac{1}{3}}]dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 5^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{\sqrt[3]{3^4}}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + C$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = (3^x + 2^x)^2$$

Giải

$$\begin{aligned} f(x) &= (3^x + 2^x)^2 = (3^x)^2 + 2.3^x.2^x + (2^x)^2 \\ &= 9^x + 2.6^x + 4^x \end{aligned}$$

$$\text{vậy } \int f(x)dx = \frac{9^x}{\ln 9} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{\sin^3 x - 2}{3 \sin^2 x}$$

Giải

$$f(x) = \frac{\sin^3 x - 2}{3 \sin^2 x} = \frac{\sin x}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

Vậy

$$\int \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{2}{3 \sin^2 x} \right) dx = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \cot x + C$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm của hàm số:

Giải

$$f(x) = 8 \sin^3 \frac{x}{3} - 6 \sin \frac{x}{3}$$

$$f(x) = 8 \sin^3 \frac{x}{3} - 6 \sin \frac{x}{3}$$

$$= -2 \left(3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3} \right) = -2 \sin x$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \int (-2 \sin x) dx$$

$$= -2(-\cos x) + C$$

$$= 2 \cos x + C$$

Bảng các nguyên hàm mở rộng

$\forall a \neq 0$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C \quad \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

Ví dụ 4: tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 3}$$

Giải

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)(x+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{5}[(x+\frac{3}{2}) - (x-1)]}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int f(x) dx &= \frac{1}{5} \left[\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+\frac{3}{2}} dx \right] \\ &= \frac{1}{5} [\ln|x-1| - \ln|x+\frac{3}{2}| + C] \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+\frac{3}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$$

Giải

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}[1 - \cos(x + \frac{\pi}{4})]} = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})} \end{aligned}$$

Vậy
$$\int f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cot(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) + C$$

Ví dụ 6: Tìm nguyên hàm của hàm số:

Giải

$$f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} dx$$

$$f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} = (e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}})^2 = |e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}|$$

$$\text{Xét } e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{-x}{2} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow \int f(x) dx = \int (e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}) dx = 2(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}}) + C$$

$$\text{Xét } e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow \int f(x) dx = \int (e^{\frac{-x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}) dx = -2(e^{\frac{-x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}) + C$$

Ví dụ 7: Tìm nguyên hàm của hàm số:

Giải

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x(x+1)^2}$$

Ta có
$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx$$

Cho $x=0$ thì $a=1$, $x=-1$ thì $c=-1$, $x=1$ thì $b=-1$

Do đó

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = 1 - \frac{2}{x} + 4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = x - 2\ln|x| + 4\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{4}{x+1} + C$$