

VI PHÂN. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. LÝ THUYẾT

1. Vi phân của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Ta gọi tích $f'(x) \cdot \Delta x$ (hoặc $y' \cdot \Delta x$) là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx .

Kí hiệu: $df(x)$ hoặc dy .

Vậy ta có: $dy = y' \cdot \Delta x$ hoặc $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

b) Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

$$\text{Do } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{Với } |\Delta x| \text{ đủ nhỏ thì } f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

STUDY TIP

Với $y = x$ ta có: $dy = (x)' \cdot \Delta x \Leftrightarrow dx = \Delta x$. Vậy $df(x) = f'(x) dx$.

2. Đạo hàm cấp cao

a) Đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Khi đó đạo hàm của hàm số $f'(x)$ nếu có, được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu: y'' hay $f''(x)$. Viết: $f''(x) = [f'(x)]'$.

b) Đạo hàm cấp n .

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$). Kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$.

Kí hiệu: $f^{(n)}(x)$ hoặc $y^{(n)}$. Viết: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

STUDY TIP

Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ là $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$ hay y''' .

c) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s = f(t)$ với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó gia tốc tức thời (γ) của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(t)$ là $\gamma(t) = f''(t)$.

STUDY TIP

Vận tốc tức thời tại thời điểm t là $v(t) = f'(t)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO.

Dạng 1. Vi phân hàm số.

Phương pháp:

- Tính vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước: $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.
- Tính vi phân của hàm số $f(x)$: $df(x) = f'(x) \cdot dx$.
- Dùng vi phân tính gần đúng.

Câu 1. Vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$ là:

- A.** $-0,07$. **B.** 10 . **C.** $1,1$. **D.** $-0,4$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có: $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(2) = 11 \Rightarrow df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$.

Câu 2. Vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0,01$ là:

- A.** $-1,1$. **B.** 10 . **C.** $0,1$. **D.** $-0,01$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow df\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \Delta x = -0,01$.

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số tại một điểm x_0 chính là tích của đạo hàm tại một điểm x_0 và số gia Δx tương ứng.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$. Biểu thức $0,01 \cdot f'(0,01)$ là số nào?

- A.** 9 . **B.** -9 . **C.** 90 . **D.** -90 .

Lời giải

Đáp án D.

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(0,01) = -9000 \Rightarrow 0,01f'(0,01) = -90.$$

Câu 4. Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x}\sqrt{x}$ là:

A. $dy = \frac{3}{4\sqrt{x}} dx$. **B.** $dy = \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$. **C.** $dy = \frac{5}{4\sqrt{x}} dx$. **D.** $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Lời giải

Đáp án A.

$$y' = \frac{\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \frac{3}{4\sqrt{x}} dx$$

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số $f(x)$ chính là tích của đạo hàm với dx tương ứng.

Câu 5. Vi phân của hàm số $y = \frac{1}{(1 + \tan x)^2}$ là:

A. $dy = \frac{2}{\cos^2 x (1 + \tan x)^3} dx$. **B.** $dy = \frac{-2}{\cos^2 x (1 + \tan x)^3} dx$.
C. $dy = \frac{1}{\cos x (1 + \tan x)^3} dx$. **D.** $dy = \frac{-1}{\cos^2 x (1 + \tan x)^2} dx$.

Lời giải

Đáp án B.

$$\text{Ta có: } dy = \frac{-2(1 + \tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \tan x)^4} dx = \frac{-2}{\cos^2 x (1 + \tan x)^3} dx$$

Câu 6. Cho hàm số $y = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng:

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. **B.** $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.
C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. **D.** $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Lời giải

Đáp án B.

$$\text{Ta có: } df(x) = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$$

STUDY TIP

Có thể sử dụng MTCT để tìm đạo hàm của hàm số sau đó ta cũng được kết quả của tính vi phân.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là sai:

A. $f'(0^+) = 1$.

B. $f'(0^-) = 1$.

C. $df(0) = dx$.

D. Hàm số không có vi phân tại $x = 0$.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có: $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = 1$; $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$ và $df(0) = dx$.

STUDY TIP

Với hàm số có nhiều biểu thức việc tính đạo hàm của hàm ta dùng định nghĩa.

Câu 8. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sqrt{1+x^2} \cdot dy - ydx = 0$.

B. $\sqrt{1+x^2} \cdot dx - dy = 0$.

C. $xdx + \sqrt{1+x^2} \cdot dy = 0$.

D. $\sqrt{1+x^2} \cdot dy + xy = 0$.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $dy = y'dx \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$ mà
 $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot dy - ydx = 0$.

Câu 9. Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

A. 2,999.

B. 2,98.

C. 2,97.

D. 2,89.

Lời giải

Đáp án A.

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0 = 27$, $\Delta x = -0,3$.

Theo công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$$

STUDY TIP

Sử dụng vi phân để tính gần đúng ta xét hàm số $f(x)$ và chọn x_0 , Δx sao cho phù hợp.

Câu 10. Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29^\circ$ có giá trị là:

A. 0,4849.

B. 0,5464.

C. 0,4989.

D. 0,4949.

Đáp án A.

Lời giải

Xét $f(x) = \sin x$ với $29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$ (rad).

Có $f'(x) = \cos x$.

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849$.

DẠNG 2. Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

Phương pháp:

- Tính đạo hàm cấp cao: Áp dụng trực tiếp định nghĩa:

$$y'' = (y')', y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

- Tính đạo hàm cấp n: Trước tiên ta tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, ... sau đó dự đoán công thức tổng quát của $f^{(n)}(x)$.
- Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm: Tính đến đạo hàm cấp cao nhất có trong đẳng thức rồi thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi cho ta được kết quả.
- Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

Câu 11. Tính y'' , biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

B. $y'' = \frac{2x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$.

D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Đáp án A

Lời giải

$$y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = (y')' = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

STUDY TIP

Sau khi tính được đạo hàm bậc nhất y' ta có thể sử dụng MTCT với chức năng: $\left(\frac{d}{dx}(\dots)\right)\Big|_x$ để kiểm tra và tính được kết quả.

Câu 12. Cho $f(x) = (2x-3)^5$. Tính $f'''(3)$.

A. 4230.

B. 4320.

C. 4204.

D. 4132.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 10(2x-3)^4$, $f''(x) = 80(2x-3)^3$, $f'''(x) = 480(2x-3)^2$.
 $\Rightarrow f'''(3) = 4320$

STUDY TIP

$$f''(x) = [f'(x)]'; \quad f'''(x) = [f''(x)]'$$

$$f'''(x) = 480(2x-3)^2 \Rightarrow f'''(3) = 4320$$

Cách khác sử dụng chức năng $\frac{dy}{dx}(\square)$ $\Big|_{x=\square}$ nhập biểu thức đạo hàm của $f''(x)$ tại điểm $x=2$ rồi so sánh kết quả ta được đáp án B

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Tính $y^{(4)}$

A. $y^{(4)} = \frac{-4}{x^5}$.

B. $y^{(4)} = \frac{1.2.3.4}{x^5}$.

C. $y^{(4)} = \frac{-4!}{x^5}$.

D. $y^{(4)} = \frac{-1.2.3.4}{x^6}$.

Đáp án B

Lời giải:

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{1.2}{x^3}, y^{(3)} = \frac{1.2.3}{x^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{x^{4+1}} = \frac{4!}{x^5}$$

STUDY TIP

Tổng quát: $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

Ví dụ 4. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$ là:

A. $y^{(n)} = \frac{2^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Đáp án D

Lời giải:

$$y' = -\frac{a}{(ax+b)^2}, y'' = \frac{2a^2}{(ax+b)^3}, y''' = \frac{-a^3 \cdot 2 \cdot 3}{(ax+b)^4}$$

Dự đoán công thức $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

Nhận xét: Việc dự đoán công thức ta đã được ngay kết quả của bài toán. Tuy nhiên để hiểu rõ và chính xác hơn ta có thể chứng minh công thức tổng quát bằng phương pháp quy nạp toán học (bạn đọc tự làm)

STUDY TIP

Phương pháp quy nạp: ta cần chứng minh mệnh đề $P(n), n \in \mathbb{N}^*$

+ Kiểm tra với $n = 1, 2, \dots$

+ Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$.

Ví dụ 5. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ là:

A. $\frac{-6}{(x+1)^4}$.

B. $\frac{-4}{(x+1)^3}$.

C. $\frac{6}{(x+1)^3}$.

D. $\frac{-12}{(x+1)^4}$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta phân tích $y = x + \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2}{(x+1)^3}, y''' = \frac{-6}{(x+1)^4}.$$

Nhận xét: Với hàm phân thức bậc của tử cao hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì ta chia tách phân số và đưa về các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

Ví dụ 6. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ là :

A. $y^{(4)} = \frac{7.4!}{(x-3)^5} - \frac{5.4!}{(x-2)^5}$.

B. $y^{(4)} = \frac{5.4!}{(x-3)^5} - \frac{2.4!}{(x-2)^5}$.

C. $y^{(4)} = \frac{5.4!}{(x-2)^5} - \frac{7.4!}{(x-3)^5}$.

D. $y^{(4)} = \frac{7}{(x-3)^5} - \frac{5}{(x-2)^5}$.

Đáp án A

Lời giải :

$$y = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2}. \text{ Mà } \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{(x-2)^5} = \frac{4!}{(x-2)^5}$$

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{(x-3)^5} = \frac{4!}{(x-3)^5}$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = \frac{7.4!}{(x-3)^5} - \frac{5.4!}{(x-2)^5}$$

Nhận xét: Với các hàm phân thức có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì ta cố gắng đưa mẫu số về dạng tích và phân tích phân số thành tổng, hiệu các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

STUDY TIP

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Các hằng số A, B tìm được bằng cách quy đồng và đồng nhất hệ số 2 về

Ví dụ 7. Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = \sin x$ là:

A. $y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$. **B.** $y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y^{(3)} = \sin(x + \pi)$. **D.** $y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án D

Lời giải:

Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

STUDY TIP

Tổng quát:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{với } n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax+b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot \cos\left(ax+b + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Ví dụ 8. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \sin^4 x$ là :

A. $-8\cos 2x + 32\cos 4x$. **B.** $4\cos 2x + 16\cos 4x$. **C.** $8\cos 2x - 12\cos 2x$. **D.** $6\cos 2x - 32\cos 4x$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y = \sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$$\Rightarrow y' = \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x,$$

$$y'' = 2\cos 2x - 2\cos 4x,$$

$$y''' = -4\sin 2x + 8\sin 4x,$$

$$y^{(4)} = -8\cos 2x + 32\cos 4x.$$

STUDY TIP

Đối với hàm lượng giác, khi tính đạo hàm bậc cao thì ta biến đổi hạ bậc hoặc biến đổi từ tích thành tổng để đưa về bậc nhất, $\sin(ax+b), \cos(ax+b)$.

Ví dụ 9. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \sin 5x \cdot \sin 3x$ là:

A. $y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x$.

B. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 8\cos 2x$.

C. $y^{(4)} = 1024\cos 16x + 4\cos 4x$.

D. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 4\cos 4x$.

Đáp án. A.

Lời giải :

Ta có $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \Rightarrow y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x$.

STUDY TIP

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là :

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Đáp án. D.

Lời giải:

$$f'(x) = x^2 + x - 12, f''(x) = 2x + 1 \text{ Do đó: } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 11. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24m / s^2$.

B. $17m / s^2$.

C. $14m / s^2$.

D. $12m / s^2$.

Đáp án D

Lời giải:

Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$

$$s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m / s^2.$$

STUDY TIP

Bài toán vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm bậc 2. Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t_0 : $\gamma(t_0) = s''(t_0)$

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

B. $y^2 \cdot y'' - 1 = 0$.

C. $3y^2 \cdot y'' + 1 = 0$.

D. $2y^3 \cdot y'' + 3 = 0$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

$$\text{Thay vào: } y^3 \cdot y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y'' + y = 0$.

B. $y'' + y = 0$.

C. $y'' - y = 0$.

D. $2y'' - 3y = 0$.

Lời giải :

$$\text{Ta có: } y = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x, y'' = -\sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow y'' + y = 0.$$

STUDY TIP

Với các biểu thức lượng giác phức tạp ta cần biến đổi rút gọn rồi sau đó tính đạo hàm cấp cao

Ví dụ 14. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

- A.** 10 m/s^2 . **B.** 12 m/s^2 . **C.** 8 m/s^2 . **D.** 16 m/s^2 .

Đáp án. B.

Lời giải:

$$v(t) = s'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(1) \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma(3) = 12 \text{ m/s}^2.$$

Dạng 3 : Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Phương pháp:

Cách 1: Từ khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + C_n^2x^2 + \dots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở hai vế khai triển của nhị thức

-Chọn $x = x_0$ và chọn n thích hợp.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính thay với một vài giá trị $n = 1, 2, \dots$ và kiểm tra tính đúng sai ta đi đến việc lựa chọn đáp án

Ví dụ 15. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}, n \in N.$
B. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n+1).2^n, n \in N.$
C. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n-1).2^{n-1}, n \in N.$
D. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n+1).2^{n+1}, n \in N.$

Đáp án A

Lời giải:

Cách 1: Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + \dots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n \forall x \in R$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1} + nx^{n-1}.C_n^n$$

$$f'(1) = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1).C_n^{n-1} + n.C_n^n = n.2^{n-1}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT

-Chọn với $n = 1$: $C_1^1 = 2^0 = 1$ (đúng)

-Chọn với $n = 2$: $C_2^1 + 2C_2^2 = 2.2 = 4$ (đúng)

....

Từ việc thử đáp án ta được kết quả

Ví dụ 16. Tính tổng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n$$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. **C.** $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^n$.

Đáp án B

Lời giải:

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$

Suy ra:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1} + n.x^{n-1}.C_n^n$$

$$f''(x) = (n-1).n.(1+x)^{n-2}$$

$$= 1.2.C_n^2 + 2.3.x.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1)x^{n-3}.C_n^{n-1} + (n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$$

$$f''(1) = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n \geq 2$.

-Với $n=2 \Rightarrow S = 1.2.C_2^2 = 2.1.2^1 = 2$ (đúng)

-Với $n=3 \Rightarrow S = 1.2.C_3^2 + 2.3.C_3^3 = 3.2.2 = 12$ (đúng)

...

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

STUDY TIP

Nếu trong biểu thức thiếu 2 số hạng đầu tiên hoặc 2 số hạng cuối cùng của khai triển nhị thức đồng thời các hệ số là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp ta dùng đạo hàm cấp 2.

Ví dụ 17. Tính tổng $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$ bằng

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Đáp án C

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nhân 2 vế với x ta được: $x(1+x)^n = x.C_n^0 + x^2.C_n^1 + x^3.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^{n-1} + x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2x.C_n^1 + 3x^2.C_n^2 + \dots + (n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được: $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = 2^n + n.2^{n-1} = (n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

STUDY TIP

Nếu trong khai triển nhị thức vẫn có số hạng đầu hoặc số hạng cuối và hệ số tăng thêm 1 đơn vị thì ta nhân 2 vế với x và sau đó dùng đạo hàm cấp 1.

Ví dụ 18. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3.C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} = 2017$$

A. $n = 1005$.

B. $n = 1006$.

C. $n = 1007$.

D. $n = 1008$.

Đáp án D

Lời giải:

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1.x^1 + C_{2n+1}^2.x^2 + C_{2n+1}^3.x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}.x^{2n+1}$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2x.C_{2n+1}^2 + 3x^2.C_{2n+1}^3 + \dots + (2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

Thay $x=-2$ vào (1) ta được:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3.C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $2n+1 = 2017 \Leftrightarrow n = 2018$.

STUDY TIP: Nhận biết được cần sử dụng đạo hàm cấp 1 và chọn giá trị $x = x_0$ dựa vào cơ sở a^n với chỉ số n tăng dần.

Ví dụ 5: Tính tổng: $S = 100.C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101.C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots + 199.C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200.C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199}$

A. 10.

B. 0.

C. 1.

D. 100.

Đáp án B.

Lời giải:

Xét $f(x) = (x^2 + x)^{100} = x^{100}(1+x)^{100}$

$$= x^{100} (C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + \dots + C_{100}^{100} x^{100})$$

$$= C_{100}^0 x^{100} + C_{100}^1 x^{101} + C_{100}^2 x^{102} + \dots + C_{100}^{100} x^{200}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 100(2x+1).(x^2+x)^{99}$$

$$= 100x^{99}.C_{100}^0 + 101x^{100}.C_{100}^1 + 102x^{101}.C_{100}^2 + \dots + 200x^{199}.C_{100}^{100}$$

Lấy $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$$0 = -100\left(\frac{1}{2}\right)^{99} C_{100}^0 + 101\left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^1 - \dots - 200\left(\frac{1}{2}\right)^{199} C_{100}^{100} \Leftrightarrow S = 0.$$

STUDY TYP: Xuất phát từ nhị thức $(x^2 + x)^{100}$, sau khi dùng đạo hàm cấp 1, chọn $x_0 = -\frac{1}{2}$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

DẠNG 1: VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3$. Tính vi phân của hàm số tại $x_0 = 1$ với số gia $\Delta x = 0,01$.

- A.** 0,01. **B.** $3 \cdot (0,01)^2$. **C.** $(0,01)^3$. **D.** 0,03.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

- A.** $dy = \frac{1}{7} dx$. **B.** $dy = 7 dx$. **C.** $dy = -\frac{1}{7} dx$. **D.** $dy = -7 dx$.

Câu 3. Xét hàm số $x = \sin y \left(0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$ cùng với ba đẳng thức:

$$(I) \frac{dx}{dy} = \cos y; \quad (II) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (III) \frac{dy}{dx} = \cos x;$$

Số đẳng thức đúng là:

- A.** Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** Chỉ (I) và (II). **D.** Chỉ (I) và (III).

Câu 4. Vi phân của hàm số $y = \cos^2 3x$ là:

- A.** $dy = 3 \sin^2 3x dx$. **B.** $dy = \sin 6x dx$. **C.** $dy = -3 \sin 6x dx$. **D.** $dy = 6 \sin 6x dx$.

Câu 5. Với hàm số $x^2 y + y^3 = 2$ thì đạo hàm y' tại điểm $(1;1)$ bằng:

- A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$. Vi phân của hàm số là:

- A.** $dy = \cos(\sin x) \cdot \sin x dx$. **B.** $dy = \sin(\cos x) \cdot dx$.
C. $dy = \cos(\sin x) \cdot \cos x dx$. **D.** $dy = \cos(\sin x) dx$.

Câu 7. Vi phân của hàm số $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$ bằng:

- A.** $dy = \frac{dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$. **B.** $dy = \frac{x^2 dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$.
C. $dy = \frac{\cos x dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$. **D.** $dy = \frac{x^2 \sin x dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$.

Câu 8. Xét hàm số $f'(x) = x^2 - 1$. Nếu đặt $y = f(x^2)$ thì $\frac{dy}{dx}$ nhận kết quả nào sau đây?

- A.** $2x(x^4 - 1)$. **B.** $2x(x^2 - 1)$. **C.** $x^4 - 1$. **D.** $x^2 - 1$.

Câu 9. Xét hàm số $y = x^2$. Gọi $\Delta x, dy$ theo thứ tự là số gia và vi phân của hàm số y tại $x_0 = 1$ và $dx = 0,01$. Hiệu của $\Delta y - dy$ bằng:

- A.** 0,001. **B.** 0,002. **C.** 0,0001. **D.** 0,00001.

Câu 10. Xét $\cos y = \sin^2 x \left(0 < y < \frac{\pi}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$. Đạo hàm của y tại $x = \frac{\pi}{4}$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{-2}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Vi phân của hàm số $y = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ là:

A. $dy = \frac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3} dx$.

B. $dy = \frac{(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^3} dx$.

C. $dy = \frac{(3x-1)(x^2-2x+5)}{(x^2+x+1)^3} dx$.

D. $dy = \frac{(x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3} dx$.

Câu 12. Cho hàm số: $y = -2\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{1-x} dy - dx = 0$. **B.** $-\sqrt{1-x} dx - dy = 0$.

C. $2\sqrt{1-x} dy + dx = 0$. **D.** $\sqrt{1-x} dy + dx = 0$.

DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI:

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp hai là $6x$?

A. $y = 3x^2$.

B. $y = 2x^3$.

C. $y = x^3$.

D. $y = x^2$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $-2\sqrt{3}$.

D. -2.

Câu 15. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$. Xét hai đẳng thức:

(I) $y \cdot y' = 2x$; (II) $y^2 \cdot y'' = y'$. Đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

Câu 16. Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$ bằng:

A. $y = \frac{2(7x^3 + 15x^2 - 93x + 77)}{(x^2 - 2x + 3)^3}$.

B. $y = \frac{2(7x^3 - 15x^2 + 93x - 77)}{(x^2 - 2x + 3)^3}$.

C. $y = \frac{2(7x^3 + 15x^2 + 93x - 77)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

D. $y = \frac{2(7x^3 - 15x^2 - 93x + 77)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

Câu 17. Hàm số $y = \sin^2 x$ có đạo hàm cấp 4 là:

A. $\cos^2 2x$.

B. $-\cos^2 2x$.

C. $8\cos 2x$.

D. $-8\cos 2x$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng:

A. $-\cos x$.

B. $\sin x$.

C. $-\sin x$.

D. $\cos x$.

Câu 19. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là:

A. $\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$.

B. $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$.

C. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

D. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^n}$.

- Câu 20.** Đạo hàm cấp 2 của hàm số : $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x$ là:
- A. $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x} - \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x + \cos x$. B. 0.
- C. $\tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x$. D. $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.
- Câu 21.** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng với mọi x ?
- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $4y + y'' = 0$. C. $4y - y'' = 0$. D. $y = y' \cdot \tan 2x$.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y''' + y'' + 16y' + 16y - 8$ là kết quả nào?
- A. 0. B. 8. C. -8. D. $16 \cos 4x$.
- Câu 23.** Cho hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ là:
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là:
- A. $[-1; 2]$. B. $(-\infty; 0]$. C. $\emptyset$. D. $\{-1\}$.
- Câu 25.** Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số này là:
- A. $y^{(4)} = \frac{16}{(x-1)^5}$. B. $y^{(4)} = \frac{32}{(x-1)^5}$. C. $y^{(4)} = \frac{-24}{(x-1)^5}$. D. $y^{(4)} = \frac{24}{(x-1)^5}$.
- Câu 26.** Cho hàm số $y = x \cdot \sin x$. Tìm hệ thức đúng:
- A. $y'' + y = -2 \cos x$. B. $y'' - y' = 2 \cos x$.
- C. $y'' + y' = 2 \cos x$. D. $y'' + y = 2 \cos x$.
- Câu 27.** Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = 15 + 20t^2 - 8t^3$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là:
- A. $\frac{50}{3} m/s$. B. $\frac{10}{3} m/s$. C. $15 m/s$. D. $20 m/s$.
- Câu 28.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng giây, s tính bằng mét. Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:
- A. $t = 5s$. B. $t = 6s$. C. $t = 2s$. D. $t = 3s$.
- Câu 29.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ trong đó t là giây, s là mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:
- A. $12 m/s$. B. $8 m/s$. C. $7 m/s$. D. $6 m/s$.
- Câu 30.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $\gamma = 18 m/s^2$.
- B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $\gamma = 9 m/s^2$.
- C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $\gamma = 12 m/s^2$.
- D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $\gamma = 24 m/s^2$.

DẠNG 3: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP

- Câu 31.** Tính tổng $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot C_n^n$.
A. 0. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 100.
- Câu 32.** Tính tổng: $S = 1 \cdot 2^{999} C_{1000}^1 + 2 \cdot 2^{998} C_{1000}^2 + \dots + 1000 \cdot 2^0 C_{1000}^{1000}$.
A. $1000 \cdot 2^{999}$. **B.** $999 \cdot 3^{1000}$. **C.** $1000 \cdot 3^{999}$. **D.** $999 \cdot 3^{999}$.
- Câu 33.** Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \dots + n \cdot C_n^n = 11264$.
A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.
- Câu 34.** $S = 1^2 \cdot C_{2000}^1 + 2^2 \cdot C_{2000}^2 + 3^2 \cdot C_{2000}^3 + \dots + 2000^2 \cdot C_{2000}^{2000}$.
A. $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{1998}$. **B.** $1999 \cdot 2000 \cdot 2^{1999}$. **C.** $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{1999}$. **D.** $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{2000}$.
- Câu 35.** Tính tổng: $S = 2 \cdot 1 \cdot 3^0 \cdot C_{200}^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3^1 \cdot C_{200}^3 + 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot C_{200}^4 - \dots + 200 \cdot 199 \cdot 3^{198} \cdot C_{200}^{200}$.
A. $200 \cdot 199 \cdot 2^{199}$. **B.** $199 \cdot 198 \cdot 2^{200}$. **C.** $200 \cdot 199 \cdot 2^{198}$. **D.** $199 \cdot 198 \cdot 2^{199}$.
- Câu 36.** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $1 \cdot C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^{n-1} + (n+1) \cdot C_n^n \leq 1024(n+2)$.
A. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. **B.** $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
C. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. **D.** $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
- Câu 37.** Tính tổng: $S = 2 \cdot 2^1 \cdot C_{100}^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot C_{100}^4 + 6 \cdot 2^5 \cdot C_{100}^6 + \dots + 100 \cdot 2^{99} \cdot C_{100}^{100}$.
A. $50(3^{99} + 1)$. **B.** $100(3^{98} + 1)$. **C.** $200(3^{99} + 1)$. **D.** $25(3^{200} + 1)$.
- Câu 38.** Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\frac{1}{2^0} C_n^1 + \frac{2}{2^1} C_n^2 + \frac{3}{2^2} C_n^3 + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} C_n^n = (n-1) \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
B. $n \cdot 3^0 \cdot C_n^n + (n-1) 3^1 \cdot C_n^{n-1} + (n-2) 3^2 \cdot C_n^{n-2} + \dots + 1 \cdot 3^{n-1} \cdot C_n^1 = (n+1) \cdot 4^{n-1}$.
C. $2 \cdot C_{2n+1}^2 + 4 \cdot C_{2n+1}^4 + 6 \cdot C_{2n+1}^6 + \dots + 2n \cdot C_{2n+1}^{2n} = (2n+1) 2^{2n-1}$.
D. $1 \cdot C_{2n}^1 + 3 \cdot C_{2n}^3 + 5 \cdot C_{2n}^5 + \dots + (2n-1) \cdot C_{2n}^{2n-1} = 2n \cdot 2^{2n+1}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT **DẠNG 1: VI PHÂN CỦA HÀM SỐ**

- Câu 1.** Đáp án **D**.
 $dy = 3 \cdot 1^2 \cdot 0,01 = 0,03$
- Câu 2.** Đáp án **A**.
 Ta có: $y' = \frac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(3) = \frac{1}{7} \Rightarrow dy = \frac{1}{7} dx$.
- Câu 3.** Đáp án **C**.
 Ta có: $x = \sin y \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \cos y dy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y$ và $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ đúng.
- Câu 4.** Đáp án **C**.
 $y' = 2 \cos 3x (-3 \sin 3x) = -3 \sin 6x \Rightarrow dy = -3 \sin 6x dx$.
- Câu 5.** Đáp án **C**.
 $x^2 y + y^3 = 2 \Rightarrow d(x^2 y) + d(y^3) = 0 \Leftrightarrow 2xy dx + x^2 dy + 3y^2 dy = 0$ tại điểm $(1; 1)$ ta có:
 $2dx + dy + 3dy = 0 \Rightarrow 4dy = -2dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} = y'(1)$.
- Câu 6.** Đáp án **C**.

$$y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \Rightarrow dy = \cos x \cdot \cos(\sin x) dx.$$

Câu 7. Đáp án B.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(x \cos x)(x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x)(-x \sin x)}{(x \cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}.$$

Câu 8. Đáp án A.

$$\text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow y = f(u)$$

$$\text{Từ } f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(u) = u^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = (u^2 - 1)2x = 2x(x^2 - 1).$$

Câu 9. Đáp án C.

$$\text{Chọn } \Delta x = dx = 0,01; x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$dy = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \Rightarrow \Delta y - dy = 0,0001.$$

Câu 10. Đáp án C.

$$\cos y = \sin^2 x \Rightarrow -\sin y dy = \sin 2x dx.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{-\sin y} = \frac{\sin 2x}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} \quad (\text{vì } \sin y > 0) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \sin^4 \frac{\pi}{4}}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Câu 11. Đáp án A.

$$y' = \frac{(-4x-2)(x^2+x+1)^2 - (-2x^2-2x)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} = \frac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}.$$

Lưu ý: có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại một điểm $x=0$ và thử lại $x=0$ vào các Đáp án ta được kết quả là **A**.

Câu 12. Đáp án A.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \sqrt{1-x} dy - dx = 0.$$

DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI.

Câu 13. Đáp án C.

$$y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x$$

Câu 14. Đáp án B.

$$y' = -\sin 2x, y'' = -2 \cos 2x \Rightarrow y^{(3)} = 4 \sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 15. Đáp án C.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\Rightarrow y \cdot y' = x \text{ và } y^2 \cdot y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ nên (I) và (II) sai.}$$

Câu 16. Đáp án B.

Ta có $y' = \frac{-7x^2 + 10x - 31}{(x^2 - 2x - 3)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(7x^3 - 15x^2 + 93x - 77)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

Kết luận: Ta có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại 1 điểm $x=0$ của y' và thử với $x=0$ vào các Đáp án ta được kết quả.

Câu 17. Đáp án D.

Ta có: $y' = \sin 2x, y'' = 2 \cos x, y''' = -4 \sin 2x \Rightarrow y^{(4)}(x) = -8 \cos 2x$.

Câu 18. Đáp án D.

Áp dụng $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow y^{(2016)}(x) = \cos(x + 1008\pi) = \cos x$.

Câu 19. Đáp án C.

Áp dụng $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^n = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 20. Đáp án D.

$y' = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

Câu 21. Đáp án B.

$y' = 2 \cos 2x, y'' = -4 \sin 2x \Rightarrow 4y + y'' = 0$

Câu 22. Đáp án A.

$y' = -2 \sin 4x, y'' = -8 \cos 4x, y''' = 32 \sin 4x \Rightarrow y''' + y'' + 16y' + 16y - 8 = 0$.

Câu 23. Đáp án B.

Áp dụng $[\cos(ax+b)]^n = a^n \cdot \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$
 $\Rightarrow f^{(4)}(x) = 16 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \Rightarrow f^{(4)}(x) = -8$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Với $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 24. Đáp án D.

$f'(x) = 15(x+1)^2 + 4, f''(x) = 30(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 25. Đáp án C.

$y = 2x - 1 - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(x-1)^2}, y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}, y''' = \frac{2 \cdot 3}{(x-1)^4}, y^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-1)^5} = \frac{-24}{(x-1)^5}$.

Câu 26. Đáp án D.

Ta có: $y' = \sin x + x \cos x, y'' = 2 \cos x - x \sin x \Rightarrow y'' + y = 2 \cos x$.

Câu 27. Đáp án A.

Ta có: $\gamma(t) = s''(t) = 40 - 48t$

Gia tốc: $\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow v(t) = s'(t) = 40 - 24t^2$.

$$v\left(\frac{5}{6}\right) = 40 \cdot \frac{5}{6} - 24 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{50}{3} (m/s)$$

Câu 28. Đáp án D.

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1 = -3(t^2 - 6t + 9) + 28 = 28 - 3(t-3)^2 \geq 28$$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 3s$.

Câu 29. Đáp án B.

$$s'(t) = 3t^2 - 4t + 4, s''(t) = 6t - 4$$

$$\text{Vậy gia tốc } \gamma(2) = s''(2) = 8 (m/s^2)$$

Câu 30. Đáp án A.

$$s'(t) = 3t^2 - 6t, s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18 (m/s^2)$$

DẠNG 3: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP C_n^k

Câu 28. Đáp án A.

Từ nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ (*) lấy đạo hàm hai vế:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + \dots + nx^{n-1} C_n^n (**).$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ ta được } S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots - (-1)^{n-1} C_n^n = 0.$$

Câu 29. Đáp án C.

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + \dots + nx^{n-1} C_n^n$$

$$\text{Cho } x = 2 \text{ ta được } S = n3^{n-1}.$$

$$\text{Với } n = 1000 \text{ ta được } S = 1000 \cdot 3^{999}$$

Câu 30. Đáp án C.

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + \dots + nx^{n-1} C_n^n$$

$$\text{Cho } x = 1 \text{ ta được } 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1} = 11264 \Rightarrow n = 11$$

Câu 31. Đáp án A.

$$\text{Xét } S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n = 1(2-1)C_n^1 + 2(3-1)C_n^2 + \dots + n(n+1-1)C_n^n$$

$$= [1 \cdot 2 \cdot C_n^1 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^2 + 3 \cdot 4 \cdot C_n^3 + \dots + n(n+1)C_n^n] - [1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n]$$

$$= A - B$$

$$\text{Từ câu 3 thì } B = n2^{n-1}$$

$$\text{Xét khai triển } x(1+x)^n = x \cdot C_n^0 + x^2 \cdot C_n^1 + x^3 \cdot C_n^2 + \dots + x^{n+1} \cdot C_n^n$$

$$\text{Lấy đạo hàm hai vế: } (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2x \cdot C_n^1 + 3x^2 \cdot C_n^2 + \dots + (n+1)x^n \cdot C_n^n$$

Tiếp tục lấy đạo hàm ta có:

$$n(1+x)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1 \cdot 2 \cdot C_n^1 + 2 \cdot 3x \cdot C_n^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} \cdot C_n^n$$

Cho $x = 1 \Rightarrow A = 2n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} \Rightarrow S = n(n+1).2^{n-2}$

Với $n = 2000 \Rightarrow S = 2000.2001.2^{1998}$.

Câu 32. Đáp án C.

Từ khai triển $(1-x)^{200}$ lấy đạo hàm đến cấp 2 hai vế, sau đó thay $x=3$ ta được $S = 200.199.2^{198}$.

Câu 33. Đáp án A.

Từ ví dụ 3 - Dạng 3. Phần lý thuyết ta có: $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + \dots + (n+1).C_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

Theo yêu cầu của bài toán $\Rightarrow (n+2).2^{n-1} \leq 1024.(n+2) \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n \leq 11, n \in \mathbb{N}$.

Vậy chọn **A**.

Câu 34. Đáp án A.

Khai triển $(1+x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=2$ ta được $S = 50(3^{99} + 1)$

Câu 35. Đáp án C.

Cách 1: Khai triển $(1+x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=1$ ta được kết quả đáp án **C**.

Cách 2: Thử với $n=1, 2$ và các đáp án thì ta được kết quả đáp án C đúng