

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DU
MÔN TOÁN LỚP 10

Giáo viên Đỗ Thị Bích Thủy

CHƯƠNG 4:

BÀI 1-BẤT ĐẲNG THỨC



BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm và tính chất của bất đẳng thức.

a) Khái niệm bất đẳng thức.

Giả sử a, b là hai số thực.

■ Các mệnh đề “ $a > b$ ”; “ $a < b$ ”; “ $a \geq b$ ”; “ $a \leq b$ ” được gọi là bất đẳng thức.

■ Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

b) Tính chất của bất đẳng thức.

● Tính chất **bắc cầu**: $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$.

● **Cộng** hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, \forall c.$$

● **Nhân** hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b \Leftrightarrow ac > bc, \forall c > 0.$$

$$a > b \Leftrightarrow ac < bc, \forall c < 0.$$

- **Cộng vế với vế** của hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$a > b \text{ và } c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

- **Chuyển vế:** $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

- **Nhân vế với vế** của hai bất đẳng cùng chiều:

$$a > b \geq 0 \text{ và } c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd.$$

- **Lũy thừa bậc chẵn** hai vế của bất đẳng thức:

$$\forall a \geq 0, b \geq 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*, \text{ ta có } a > b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$$

- **Khai căn** hai vế của bất đẳng thức:

$$a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$$

Ví dụ 1: Chứng minh với mọi x ta có:

$$x^2 > 2(x - 1)$$

Ví dụ 2: Chứng minh nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thì:

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc$$

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

● Với mọi $a \in \mathbb{O}$, ta có: $-|a| \leq a \leq |a|$

● Với $a > 0$, ta có: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

● Với $a > 0$, ta có: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$

● Với $a, b \in \mathbb{O}$, ta có:

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Ví dụ 3: Cho $x, y \in \mathbb{O}$, chứng minh:

$$|3 - x + y| + |y| + |8 - x| \geq 5$$

Giải.

$$\begin{aligned} |3 - x + y| + |y| + |8 - x| &\geq |3 - x + y| + |y + 8 - x| \\ &\geq |3 - x + y| + |x - 8 - y| \\ &\geq |3 - x + y + x - 8 - y| \\ &\geq |-5| = 5 \end{aligned}$$

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

3. Bất đẳng thức Cauchy.

● Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

*Phát biểu bằng lời
bất đẳng thức trên.*

Ví dụ 4: Cho a, b, c là ba số dương bất kỳ, chứng minh:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

Giải.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 6 \end{aligned}$$

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

3. Bất đẳng thức Cauchy.

● Hệ quả:

- ◆ Nếu hai số dương thay đổi nhưng có **tổng không đổi** thì *tích của chúng lớn nhất* khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.
- ◆ Nếu hai số dương thay đổi nhưng có **tích không đổi** thì *tổng của chúng nhỏ nhất* khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Chứng minh:

Giả sử hai số dương x, y có tổng $x + y = S$ không đổi.

Khi đó:

$$\frac{S}{2} = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{nên} \quad xy \leq \frac{S^2}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó, tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{S^2}{4}$
khi và chỉ khi $x = y$.

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Chứng minh:

Giả sử hai số dương x, y có tích $xy = P$ không đổi.

Khi đó:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{P} \text{ nên } x + y \geq 2\sqrt{P}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó, tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{P}$
khi và chỉ khi $x = y$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x + \frac{3}{x} \quad \text{với } x > 0.$$

Giải.

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên ta có } f(x) = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{và } f(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là: $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

3. Bất đẳng thức Cauchy.

● Mở rộng, cho ba số $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6: Chứng minh nếu a, b, c là ba số dương thì

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad \text{Khi nào xảy ra đẳng thức.}$$

Giải. Vì a, b, c là ba số dương nên: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

$$\text{Do đó } (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

*Làm bài tập trong sách
Đại số 10*

