

ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$).

- Xét một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s = f(t)$ với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó gia tốc tức thời (γ) của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(t)$ là $\gamma(t) = f''(t)$.

- Vận tốc tức thời tại thời điểm t là $v(t) = f'(t)$.

□ **Chú ý.**

□ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$.

* Đạo hàm cấp **hai** của $y = f(x)$. Ký hiệu: $y'' = f''(x) = [f'(x)]'$.

* Đạo hàm cấp **ba** của $y = f(x)$. Ký hiệu: $y''' = f'''(x) = [f''(x)]'$ hoặc $y^{(3)} = f^{(3)}(x) = [f''(x)]'$.

* Đạo hàm cấp **bốn** của $y = f(x)$. Ký hiệu: $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = [f^{(3)}(x)]'$.

* Đạo hàm cấp **$n-1$** của $y = f(x)$. Ký hiệu: $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$.

* Đạo hàm cấp **n** của $y = f(x)$. Ký hiệu: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp cao

Phương pháp:

- Tính đạo hàm cấp cao: Áp dụng trực tiếp định nghĩa:

$$y'' = (y')', y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

- Tính đạo hàm cấp n : Trước tiên ta tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, ... sau đó dự đoán công thức tổng quát của $f^{(n)}(x)$.

- Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm: Tính đến đạo hàm cấp cao nhất có trong đẳng thức rồi thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi cho ta được kết quả.

Ví dụ 1. Tính y'' , biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

B. $y'' = \frac{2x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}.$

D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Đáp án **A.**

Lời giải

$$y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = (y')' = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = (2x-3)^5$. Tính $f'''(3)$.

A. 4230.

B. 4320.

C. 4204.

D. 4132.

Đáp án **B.**

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 10(2x-3)^4$, $f''(x) = 80(2x-3)^3$, $f'''(x) = 480(2x-3)^2$.

$$\Rightarrow f'''(3) = 4320$$

$$f'''(x) = 480(2x-3)^2 \Rightarrow f'''(3) = 4320$$

Cách khác sử dụng chức năng $\frac{dy}{dx}(\square)$ tại $x = \square$ nhập biểu thức đạo hàm của $f''(x)$ tại điểm $x=2$ rồi

so sánh kết quả ta được đáp án B

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Tính $y^{(4)}$

A. $y^{(4)} = \frac{-4}{x^5}.$

B. $y^{(4)} = \frac{1.2.3.4}{x^5}.$

C. $y^{(4)} = \frac{-4!}{x^5}.$

D. $y^{(4)} = \frac{-1.2.3.4}{x^6}.$

Đáp án **B.**

Lời giải

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{1.2}{x^3}, y^{(3)} = \frac{1.2.3}{x^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^4.4!}{x^{4+1}} = \frac{4!}{x^5}$$

Ví dụ 4. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$ là:

A. $y^{(n)} = \frac{2^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}.$

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(x+1)^{n+1}}.$ **C.** $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}.$ **D.**

$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}.$

Đáp án D.

Lời giải

$$y' = -\frac{a}{(ax+b)^2}, y'' = \frac{2a^2}{(ax+b)^3}, y''' = \frac{-a^3 \cdot 2 \cdot 3}{(ax+b)^4}$$

$$\text{Dự đoán công thức } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Nhận xét: Việc dự đoán công thức ta đã được ngay kết quả của bài toán. Tuy nhiên để hiểu rõ và chính xác hơn ta có thể chứng minh công thức tổng quát bằng phương pháp quy nạp toán học (bạn đọc tự làm)

Ví dụ 5. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ là:

A. $\frac{-6}{(x+1)^4}$.

B. $\frac{-4}{(x+1)^3}$.

C. $\frac{6}{(x+1)^3}$.

D. $\frac{-12}{(x+1)^4}$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta phân tích $y = x + \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2}{(x+1)^3}, y''' = \frac{-6}{(x+1)^4}.$$

Nhận xét: Với hàm phân thức bậc của tử cao hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì ta chia tách phân số và đưa về các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

Ví dụ 6. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ là :

A. $y^{(4)} = \frac{7 \cdot 4!}{(x-3)^5} - \frac{5 \cdot 4!}{(x-2)^5}$.

B. $y^{(4)} = \frac{5 \cdot 4!}{(x-3)^5} - \frac{2 \cdot 4!}{(x-2)^5}$.

C. $y^{(4)} = \frac{5 \cdot 4!}{(x-2)^5} - \frac{7 \cdot 4!}{(x-3)^5}$.

D. $y^{(4)} = \frac{7}{(x-3)^5} - \frac{5}{(x-2)^5}$.

Đáp án A.

Lời giải

$$y = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2}. \text{ Mà } \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{(x-2)^5} = \frac{4!}{(x-2)^5}$$

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 \cdot 4!}{(x-3)^5} = \frac{4!}{(x-3)^5}$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = \frac{7 \cdot 4!}{(x-3)^5} - \frac{5 \cdot 4!}{(x-2)^5}$$

Nhận xét: Với các hàm phân thức có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì ta cố gắng đưa mẫu số về dạng tích và phân tích phân số thành tổng, hiệu các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

Ví dụ 7. Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = \sin x$ là:

A. $y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$. B. $y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y^{(3)} = \sin(x + \pi)$. **D.**

$y^{(3)} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án **D.**

Lời giải

Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$y''' = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

Ví dụ 8. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \sin^4 x$ là :

A. $-8\cos 2x + 32\cos 4x$.

B. $4\cos 2x + 16\cos 4x$.

C. $8\cos 2x - 12\cos 2x$.

D. $6\cos 2x - 32\cos 4x$.

Đáp án **A.**

Lời giải

Ta có: $y = \sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\Rightarrow y' = \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x$,

$y'' = 2\cos 2x - 2\cos 4x$,

$y''' = -4\sin 2x + 8\sin 4x$,

$$y^{(4)} = -8\cos 2x + 32\cos 4x.$$

Ví dụ 9. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \sin 5x \cdot \sin 3x$ là:

A. $y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x$. B. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 8\cos 2x$.

C. $y^{(4)} = 1024\cos 16x + 4\cos 4x$. D. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 4\cos 4x$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \Rightarrow y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là :

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Đáp án D.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

B. $y^2 \cdot y'' - 1 = 0$.

C. $3y^2 \cdot y'' + 1 = 0$.

D. $2y^3 \cdot y'' + 3 = 0$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3 \cdot y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} + 1 = -1 + 1 = 0$.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y'' + y = 0$.

B. $y'' + y = 0$.

C. $y'' - y = 0$.

D. $2y'' - 3y = 0$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x, y'' = -\sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow y'' + y = 0.$$

Dạng 3 : Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Phương pháp:

Cách 1: Từ khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$

Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở hai vế khai triển của nhị thức

-Chọn $x = x_0$ và chọn n thích hợp.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính thay với một vài giá trị $n = 1, 2, \dots$ và kiểm tra tính đúng sai ta đi đến việc lựa chọn đáp án

Ví dụ 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}, n \in N.$

B. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n+1).2^n, n \in N.$

C. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n-1).2^{n-1}, n \in N.$

D. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = (n+1).2^{n+1}, n \in N.$

Đáp án **A.**

Lời giải

Cách 1: Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^n x^n \forall x \in R$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1} + n.x^{n-1}.C_n^n$$

$$f'(1) = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (n-1).C_n^{n-1} + n.C_n^n = n.2^{n-1}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT

-Chọn với $n = 1$: $C_1^1 = 2^0 = 1$ (đúng).

-Chọn với $n = 2$: $C_2^1 + 2C_2^2 = 2.2 = 4$ (đúng).

Từ việc thử đáp án ta được kết quả

Ví dụ 2. Tính tổng với $n \in N, n \geq 2$:

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n$$

- A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. C. $n.(n-1).2^{n-1}$. D. $(n-1).(n-2).2^n$.

Đáp án **B.**

Lời giải

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$

Suy ra:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1} + n.x^{n-1}.C_n^n$$

$$f''(x) = (n-1).n.(1+x)^{n-2}$$

$$= 1.2.C_n^2 + 2.3.x.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1)x^{n-3}.C_n^{n-1} + (n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$$

$$f''(1) = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + \dots + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n \geq 2$.

-Với $n = 2 \Rightarrow S = 1.2.C_2^2 = 2.1.2^1 = 2$ (đúng)

-Với $n = 3 \Rightarrow S = 1.2.C_3^2 + 2.3.C_3^3 = 3.2.2 = 12$ (đúng)

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

Ví dụ 3. Tính tổng $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$ bằng

- A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. D. $(n+1).2^n$.

Đáp án **C.**

Lời giải

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nhân 2 vế với x ta được: $x(1+x)^n = x.C_n^0 + x^2.C_n^1 + x^3.C_n^2 + \dots + x^n.C_n^{n-1} + x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2x.C_n^1 + 3x^2.C_n^2 + \dots + (n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được: $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = 2^n + n.2^{n-1} = (n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

Ví dụ 4. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3.C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} = 2017$$

- A. $n=1005$. **B.** $n=1006$. **C.** $n=1007$. **D.** $n=1008$.

Đáp án D.

Lời giải

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 \cdot x^1 + C_{2n+1}^2 \cdot x^2 + C_{2n+1}^3 \cdot x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \cdot x^{2n+1}$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2x \cdot C_{2n+1}^2 + 3x^2 \cdot C_{2n+1}^3 + \dots + (2n+1) \cdot x^{2n} \cdot C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

Thay $x = -2$ vào (1) ta được:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2 \cdot C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2 \cdot C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) \cdot x^{2n} \cdot C_{2n+1}^{2n+1}$$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $2n+1 = 2017 \Leftrightarrow n = 2018$.

Ví dụ 5: Tính tổng:

$$S = 100 \cdot C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101 \cdot C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots + 199 \cdot C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200 \cdot C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199}$$

A. 10 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 100 .

Đáp án B.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } f(x) &= (x^2 + x)^{100} = x^{100} (1+x)^{100} \\ &= x^{100} (C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + \dots + C_{100}^{100} x^{100}) \\ &= C_{100}^0 \cdot x^{100} + C_{100}^1 \cdot x^{101} + C_{100}^2 \cdot x^{102} + \dots + C_{100}^{100} \cdot x^{200} \\ \Rightarrow f'(x) &= 100(2x+1) \cdot (x^2 + x)^{99} \\ &= 100x^{99} \cdot C_{100}^0 + 101x^{100} \cdot C_{100}^1 + 102x^{101} \cdot C_{100}^2 + \dots + 200x^{199} \cdot C_{100}^{100} \end{aligned}$$

Lấy $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$$0 = -100 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} C_{100}^0 + 101 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^1 - \dots - 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{199} C_{100}^{100} \Leftrightarrow S = 0 .$$

Dạng 4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

- Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

Ví dụ 1. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

- A. $24m/s^2$. B. $17m/s^2$. C. $14m/s^2$. D. $12m/s^2$.

Đáp án D.

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$

$$s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m/s^2 .$$

Ví dụ 2. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

- A. $10 m/s^2$. B. $12 m/s^2$. C. $8 m/s^2$. D. $16 m/s^2$.

Đáp án B.

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(1) \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma(3) = 12m/s^2 .$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KĨ NĂNG
DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 1: Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp hai là $6x$?

- A. $y = 3x^2$. B. $y = 2x^3$. C. $y = x^3$. D. $y = x^2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

- A. 2 . B. $2\sqrt{3}$. C. $-2\sqrt{3}$. D. -2 .

Câu 3: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Xét hai đẳng thức:

(I) $y.y' = 2x$; (II) $y^2.y'' = y'$. Đẳng thức nào đúng?

- A. Chỉ (I) . B. Chỉ (II) . C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 4: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$ bằng:

A. $y = \frac{2(7x^3 + 15x^2 - 93x + 77)}{(x^2 - 2x + 3)^3}$. **B.** $y = \frac{2(7x^3 - 15x^2 + 93x - 77)}{(x^2 - 2x + 3)^3}$.

C. $y = \frac{2(7x^3 + 15x^2 + 93x - 77)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$. **D.** $y = \frac{2(7x^3 - 15x^2 - 93x + 77)}{(x^2 - 2x - 3)^3}$.

Câu 5: Hàm số $y = \sin^2 x$ có đạo hàm cấp 4 là:

- A.** $\cos^2 2x$. **B.** $-\cos^2 2x$. **C.** $8\cos 2x$. **D.** $-8\cos 2x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng:

- A.** $-\cos x$. **B.** $\sin x$. **C.** $-\sin x$. **D.** $\cos x$.

Câu 7: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là:

- A.** $\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$. **B.** $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$. **C.** $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$. **D.** $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^n}$.

Câu 8: Đạo hàm cấp 2 của hàm số: $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x$ là:

- A.** $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x} - \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x + \cos x$. **B.** 0.
C. $\tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x$. **D.** $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng với mọi x ?

- A.** $y^2 + (y')^2 = 4$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $4y - y'' = 0$. **D.** $y = y' \cdot \tan 2x$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y''' + y'' + 16y' + 16y - 8$ là kết quả nào?

- A.** 0. **B.** 8. **C.** -8. **D.** $16\cos 4x$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là:

- A.** $[-1; 2]$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $\emptyset$. **D.** $\{-1\}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số này là:

A. $y^{(4)} = \frac{16}{(x-1)^5}$. B. $y^{(4)} = \frac{32}{(x-1)^5}$. C. $y^{(4)} = \frac{-24}{(x-1)^5}$. D. $y^{(4)} = \frac{24}{(x-1)^5}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x \cdot \sin x$. Tìm hệ thức đúng:

A. $y'' + y = -2 \cos x$. B. $y'' - y' = 2 \cos x$. C. $y'' + y' = 2 \cos x$. D. $y'' + y = 2 \cos x$.

DẠNG 2: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP

Câu 15: Tính tổng $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot C_n^n$.

A. 0. B. 1. C. 10. D. 100.

Câu 16: Tính tổng: $S = 1 \cdot 2^{999} C_{1000}^1 + 2 \cdot 2^{998} C_{1000}^2 + \dots + 1000 \cdot 2^0 C_{1000}^{1000}$.

A. $1000 \cdot 2^{999}$. B. $999 \cdot 3^{1000}$. C. $1000 \cdot 3^{999}$. D. $999 \cdot 3^{999}$.

Câu 17: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \dots + n \cdot C_n^n = 11264$.

A. $n = 9$. B. $n = 10$. C. $n = 11$. D. $n = 12$.

Câu 18: $S = 1^2 \cdot C_{2000}^1 + 2^2 \cdot C_{2000}^2 + 3^2 \cdot C_{2000}^3 + \dots + 2000^2 \cdot C_{2000}^{2000}$.

A. $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{1998}$. B. $1999 \cdot 2000 \cdot 2^{1999}$. C. $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{1999}$. D. $2000 \cdot 2001 \cdot 2^{2000}$.

Câu 19: Tính tổng: $S = 2 \cdot 1 \cdot 3^0 \cdot C_{200}^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3^1 \cdot C_{200}^3 + 4 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot C_{200}^4 - \dots + 200 \cdot 199 \cdot 3^{198} \cdot C_{200}^{200}$.

A. $200 \cdot 199 \cdot 2^{199}$. B. $199 \cdot 198 \cdot 2^{200}$. C. $200 \cdot 199 \cdot 2^{198}$. D. $199 \cdot 198 \cdot 2^{199}$.

Câu 20: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $1 \cdot C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 3 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^{n-1} + (n+1) \cdot C_n^n \leq 1024(n+2)$.

A. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. B. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

C. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. D. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 21: Tính tổng: $S = 2 \cdot 2^1 \cdot C_{100}^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot C_{100}^4 + 6 \cdot 2^5 \cdot C_{100}^6 + \dots + 100 \cdot 2^{99} \cdot C_{100}^{100}$.

A. $50(3^{99} + 1)$. B. $100(3^{98} + 1)$. C. $200(3^{99} + 1)$. D. $25(3^{200} + 1)$.

Câu 22: Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2^0} C_n^1 + \frac{2}{2^1} C_n^2 + \frac{3}{2^2} C_n^3 + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} C_n^n = (n-1) \left(\frac{3}{2} \right)^n$.

B. $n \cdot 3^0 \cdot C_n^n + (n-1) 3^1 \cdot C_n^{n-1} + (n-2) 3^2 \cdot C_n^{n-2} + \dots + 1 \cdot 3^{n-1} \cdot C_n^1 = (n+1) \cdot 4^{n-1}$.

C. $2 \cdot C_{2n+1}^2 + 4 \cdot C_{2n+1}^4 + 6 \cdot C_{2n+1}^6 + \dots + 2n \cdot C_{2n+1}^{2n} = (2n+1) 2^{2n-1}$.

D. $1 \cdot C_{2n}^1 + 3 \cdot C_{2n}^3 + 5 \cdot C_{2n}^5 + \dots + (2n-1) \cdot C_{2n}^{2n-1} = 2n \cdot 2^{2n+1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 1: Đáp án C.

$$y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x$$

Câu 2: Đáp án B.

$$y' = -\sin 2x, y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y^{(3)} = 4\sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 3: Đáp án C.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\Rightarrow y \cdot y' = x \text{ và } y^2 \cdot y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ nên (I) và (II) sai.}$$

Câu 4: Đáp án B.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-7x^2+10x-31}{(x^2-2x-3)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(7x^3-15x^2+93x-77)}{(x^2-2x-3)^3}.$$

Kết luận: Ta có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại 1 điểm $x=0$ của y' và thử với $x=0$ vào các Đáp án ta được kết quả.

Câu 5: Đáp án D.

$$\text{Ta có: } y' = \sin 2x, y'' = 2\cos x, y''' = -4\sin 2x \Rightarrow y^{(4)}(x) = -8\cos 2x.$$

Câu 6: Đáp án D.

$$\text{Áp dụng } \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow y^{(2016)}(x) = \cos(x + 1008\pi) = \cos x.$$

Câu 7: Đáp án C.

$$\text{Áp dụng } \left(\frac{1}{ax+b}\right)^n = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}} \text{ ta được: } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Câu 8: Đáp án D.

$$y' = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x.$$

Câu 9: Đáp án B.

$$y' = 2\cos 2x, y'' = -4\sin 2x \Rightarrow 4y + y'' = 0$$

Câu 10: Đáp án A.

$$y' = -2\sin 4x, y'' = -8\cos 4x, y''' = 32\sin 4x \Rightarrow y''' + y'' + 16y' + 16y - 8 = 0.$$

Câu 11: Đáp án B.

$$\text{Áp dụng } \left[\cos(ax+b) \right]^n = a^n \cdot \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 16 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \Rightarrow f^{(4)}(x) = -8$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Với } x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}.$$

Câu 12: Đáp án D.

$$f'(x) = 15(x+1)^2 + 4, f''(x) = 30(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Câu 13: Đáp án C.

$$y = 2x - 1 - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(x-1)^2}, y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}, y''' = \frac{2 \cdot 3}{(x-1)^4}, y^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-1)^5} = \frac{-24}{(x-1)^5}.$$

Câu 14: Đáp án D.

$$\text{Ta có: } y' = \sin x + x \cos x, y'' = 2 \cos x - x \sin x \Rightarrow y'' + y = 2 \cos x.$$

DẠNG 2: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP C_n^k

Câu 15: Đáp án A.

Từ nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ (*) lấy đạo hàm hai vế:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + \dots + nx^{n-1} C_n^n (**).$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ ta được } S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots - (-1)^{n-1} C_n^n = 0.$$

Câu 16: Đáp án C.

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + \dots + nx^{n-1} C_n^n$$

$$\text{Cho } x = 2 \text{ ta được } S = n3^{n-1}.$$

$$\text{Với } n = 1000 \text{ ta được } S = 1000 \cdot 3^{999}$$

Câu 17: Đáp án C.

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \dots + nx^{n-1}C_n^n$

Cho $x=1$ ta được $1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1} = 11264 \Rightarrow n=11$

Câu 18: Đáp án A.

Xét $S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \dots + n^2C_n^n = 1(2-1)C_n^1 + 2(3-1)C_n^2 + \dots + n(n+1-1)C_n^n$
 $= [1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + 3.4.C_n^3 + \dots + n(n+1)C_n^n] - [1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n]$
 $= A - B$

Từ câu 3 thì $B = n2^{n-1}$

Xét khai triển $x(1+x)^n = x.C_n^0 + x^2.C_n^1 + x^3.C_n^2 + \dots + x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm hai vế: $(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2x.C_n^1 + 3x^2.C_n^2 + \dots + (n+1)x^n.C_n^n$

Tiếp tục lấy đạo hàm ta có:

$n(1+x)^{n-1} + n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^1 + 2.3x.C_n^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1}.C_n^n$

Cho $x=1 \Rightarrow A = 2n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} \Rightarrow S = n(n+1).2^{n-2}$

Với $n=2000 \Rightarrow S = 2000.2001.2^{1998}$.

Câu 19: Đáp án C.

Từ khai triển $(1-x)^{200}$ lấy đạo hàm đến cấp 2 hai vế, sau đó thay $x=3$ ta được $S = 200.199.2^{198}$.

Câu 20: Đáp án A.

Từ ví dụ 3 - Dạng 3. Phần lý thuyết ta có: $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + \dots + (n+1).C_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

Theo yêu cầu của bài toán $\Rightarrow (n+2).2^{n-1} \leq 1024.(n+2) \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n \leq 11, n \in \mathbb{N}$. Vậy chọn **A**.

Câu 21: Đáp án A.

Khai triển $(1+x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=2$ ta được $S = 50(3^{99} + 1)$

Câu 22: Đáp án C.

Cách 1: Khai triển $(1+x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng về với về và thay $x=1$ ta được kết quả đáp án C.

Cách 2: Thử với $n=1,2$ và các đáp án thì ta được kết quả đáp án C đúng.

Dạng 4: Ý nghĩa cơ học vật lí.

Câu 23: Phương trình chuyển động của một chất điểm $s=15+20t^2-8t^3$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là:

- A. $\frac{50}{3} m/s$. B. $\frac{10}{3} m/s$. C. $15 m/s$. D. $20 m/s$.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=-t^3+9t^2+t+10$ trong đó t tính bằng giây, s tính bằng mét. Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

- A. $t=5s$. B. $t=6s$. C. $t=2s$. D. $t=3s$.

Câu 25: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-2t^2+4t+1$ trong đó t là giây, s là mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ là:

- A. $12 m/s$. B. $8 m/s$. C. $7 m/s$. D. $6 m/s$.

Câu 26: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $\gamma=18 m/s^2$.
B. Gia tốc của chuyển động khi $t=4s$ là $\gamma=9 m/s^2$.
C. Gia tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $\gamma=12 m/s^2$.
D. Gia tốc của chuyển động khi $t=3s$ là $\gamma=24 m/s^2$.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $\gamma(t) = s''(t) = 40 - 48t$

Gia tốc: $\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow v(t) = s'(t) = 40 - 24t^2$.

$$v\left(\frac{5}{6}\right) = 40 \cdot \frac{5}{6} - 24 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{50}{3} (m/s)$$

Câu 24: Đáp án D.

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1 = -3(t^2 - 6t + 9) + 28 = 28 - 3(t-3)^2 \geq 28$$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=3s$.

Câu 25: Đáp án B.

$$s'(t) = 3t^2 - 4t + 4, s''(t) = 6t - 4$$

Vậy gia tốc $\gamma(2) = s''(2) = 8(m/s^2)$

Câu 26: Đáp án A.

$$s'(t) = 3t^2 - 6t, s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18(m/s^2)$$

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1: Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

A. $y'' = 0$. B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. **D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.**

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{x}{x-2} \right)' = \frac{-2}{(x-2)^2}; y'' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}$$

Câu 2: Hàm số $y = (x^2 + 1)^3$ có đạo hàm cấp ba là:

A. $y''' = 12(x^2 + 1)$. B. $y''' = 24(x^2 + 1)$.
C. $y''' = 24(5x^2 + 3)$. D. $y''' = -12(x^2 + 1)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1; y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

$$y'' = 30x^4 + 36x^2 + 6; y''' = 120x^3 + 72x = 24(5x^2 + 3).$$

Câu 3: Hàm số $y = \sqrt{2x+5}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = \frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. B. $y'' = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.
C. $y'' = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. D. $y'' = -\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt{2x+5})' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$y'' = -\frac{(\sqrt{2x+5})'}{2x+5} = -\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}.$$

Câu 4: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng:

A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}.$

B. $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^6}.$

C. $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^6}.$ **D.**

$y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^6}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}.$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow y^{(3)} = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{24}{(x+1)^5} \Rightarrow y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}.$$

Câu 5: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng :

A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}.$

B. $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^5}.$

C. $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^5}.$ **D.**

$y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^5}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x+1}.$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}; y'' = \frac{2}{(x+1)^3}; y''' = -\frac{6}{(x+1)^4}; y^{(4)} = \frac{24}{(x+1)^5}; y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}.$$

Câu 6: Hàm số $y = x\sqrt{x^2 + 1}$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = -\frac{2x^3 + 3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

B. $y'' = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}}.$

C. $y'' = \frac{2x^3 + 3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

D. $y'' = -\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } y' = \sqrt{x^2+1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}; y'' = \frac{4x\sqrt{x^2+1} - (2x^2+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Câu 7: Hàm số $y = (2x+5)^5$ có đạo hàm cấp 3 bằng :

A. $y''' = 80(2x+5)^3$. **B.** $y''' = 480(2x+5)^2$.

C. $y''' = -480(2x+5)^2$. **D.** $y''' = -80(2x+5)^3$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } y' = 5(2x+5)^4 \cdot 2 = 10(2x+5)^4; y'' = 80(2x+5)^3; y''' = 480(2x+5)^2.$$

Câu 8: Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **B.** $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x}; y'' = -\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin x$. Chọn câu **sai**.

A. $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y'' = \sin(x + \pi)$. **C.** $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. **D.**

$y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right); y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi + x).$$

$$y''' = \cos(\pi + x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right); y^{(4)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin(2\pi + x).$$

Câu 10: Hàm số $y = \frac{-2x^2+3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$; $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Câu 11: Hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y' = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $y'' = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $y''' = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $y^{(4)} = 16\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Khi đó: $f^{(4)}(x) = -8 \Leftrightarrow 16\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \xrightarrow{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} x = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định đúng

A. $4y - y' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 = (y')^2 = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 2\cos 2x$; $y'' = -4\sin 2x$. $\Rightarrow 4y + y'' = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{x}$. Xét hai mệnh đề:

(I): $y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$. (II): $y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = \frac{1}{x^2}$; $y'' = -\frac{2}{x^3}$; $y''' = \frac{6}{x^4}$.

Câu 14: Nếu $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ thì $f(x)$ bằng

- A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $-\frac{1}{\cos x}$. C. $\cot x$. D. $\tan x$.

Lời giải

Chọn D.

Vì: $(\tan x)'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{-2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1}$. Xét hai mệnh đề:

(I): $y' = f'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. (II): $y'' = f''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1} = -x + \frac{2}{x - 1} \Rightarrow y' = -1 - \frac{2}{(x-1)^2}$; $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Giá trị $f''(0)$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 12. D. 24.

Lời giải

Chọn B.

Vì: $f'(x) = 3(x+1)^2$; $f''(x) = 6(x+1) \Rightarrow f''(0) = 6$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. 0. B. -1. C. -2. D. 5.

Lời giải

Chọn B.

Vì: $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x + 2x$; $f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là

- A. $[-1; 2]$. B. $(-\infty; 0]$. C. $\{-1\}$. D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn C.

Vì: $f'(x) = 15(x+1)^2 + 4$; $f''(x) = 30(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-3}$. Khi đó :

- A. $y'''(1) = \frac{3}{8}$. B. $y'''(1) = \frac{1}{8}$. C. $y'''(1) = -\frac{3}{8}$. D. $y'''(1) = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì: $y' = -\frac{1}{(x-3)^2}$; $y'' = \frac{2}{(x-3)^3}$; $y''' = -\frac{6}{(x-3)^4} \Rightarrow y'''(1) = -\frac{3}{8}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = (ax+b)^5$ với a, b là tham số. Khi đó :

- A. $y^{(10)}(1) = 0$. B. $y^{(10)}(1) = 10a + b$. C. $y^{(10)}(1) = 5a$. D. $y^{(10)}(1) = 10a$.

Lời giải

Chọn A.

Vì: $y' = 5a(ax+b)^4$; $y'' = 20a^2(ax+b)^3$; $y''' = 60a^3(ax+b)^2$; $y^{(4)} = 120a^4(ax+b)$; $y^{(5)} = 120a^5$; $y^{(6)} = 0 \Rightarrow y^{(10)} = 0$. Do đó $y^{(10)}(1) = 0$

Câu 21: Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Tính $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

- A. 64. B. -64. C. $64\sqrt{3}$. D. $-64\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì: $y' = 2\sin 2x(2\cos 2x) = 2\sin 4x$; $y'' = 8\cos 4x$; $y''' = -32\sin 4x$;

$$y^{(4)} = -128\cos 4x \Rightarrow y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 64\sqrt{3}.$$

Câu 22: Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

A. $y'' = 0$. B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

Câu 23: Hàm số $y = (x^2 + 1)^3$ có đạo hàm cấp ba là:

A. $y''' = 12(x^2 + 1)$. B. $y''' = 24(x^2 + 1)$.
C. $y''' = 24(5x^2 + 3)$. D. $y''' = -12(x^2 + 1)$.

Câu 24: Hàm số $y = \sqrt{2x+5}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

A. $y'' = \frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. B. $y'' = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.
C. $y'' = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$. D. $y'' = -\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

Câu 25: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng:

A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}$. B. $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^6}$. C. $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^6}$. D.
 $y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^6}$.

Câu 26: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đạo hàm cấp 5 bằng :

A. $y^{(5)} = -\frac{120}{(x+1)^6}$. B. $y^{(5)} = \frac{120}{(x+1)^5}$. C. $y^{(5)} = \frac{1}{(x+1)^5}$. D.
 $y^{(5)} = -\frac{1}{(x+1)^5}$.

Câu 27: Hàm số $y = x\sqrt{x^2+1}$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = -\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. B. $y'' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$.
C. $y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. D. $y'' = -\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Câu 28: Hàm số $y = (2x+5)^5$ có đạo hàm cấp 3 bằng :

A. $y''' = 80(2x+5)^3$. B. $y''' = 480(2x+5)^2$.

C. $y''' = -480(2x+5)^2$. D. $y''' = -80(2x+5)^3$.

Câu 29: Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. B. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \sin x$. Chọn câu **sai**.

A. $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y'' = \sin(x + \pi)$. C. $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. D.

$y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$.

Câu 31: Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Câu 32: Hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định đúng

A. $4y - y' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 = (y')^2 = 4$

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{x}$. Xét hai mệnh đề :

(I): $y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$. (II): $y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai

Câu 35: Nếu $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ thì $f(x)$ bằng

A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $-\frac{1}{\cos x}$. C. $\cot x$. D. $\tan x$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x-1}$. Xét hai mệnh đề :

(I): $y' = f'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. (II): $y'' = f''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Giá trị $f''(0)$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 12. D. 24.

Câu 38: Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. 0. B. -1. C. -2. D. 5.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

- A. $[-1; 2]$. B. $(-\infty; 0]$. C. $\{-1\}$. D. $\emptyset$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-3}$. Khi đó :

- A. $y'''(1) = \frac{3}{8}$. B. $y'''(1) = \frac{1}{8}$. C. $y'''(1) = -\frac{3}{8}$. D. $y'''(1) = -\frac{1}{4}$.

Câu 41: Cho hàm số $y = (ax+b)^5$ với a, b là tham số. Khi đó :

- A. $y^{(10)}(1) = 0$. B. $y^{(10)}(1) = 10a + b$. C. $y^{(10)}(1) = 5a$. D. $y^{(10)}(1) = 10a$.

Câu 42: Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Tính $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

- A. 64. B. -64. C. $64\sqrt{3}$. D. $-64\sqrt{3}$.