



PHÒNG GD & ĐT THÀNH PHỐ
THANH HÓA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2016 - 2017

Môn Toán: Lớp 9

(Thời gian làm bài: 150 phút)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

b) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

b) Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của



hình vuông ABCD

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

----- Hết -----

Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.



ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
1	a	Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.	0,5
		$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$	0,5
	b	Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:	0,5
		$P = \frac{2}{7}$	1,0
		$\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7}$	0,25
		$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$	0,25
		$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$ Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (t/m) Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$	
	c	Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$	0,25

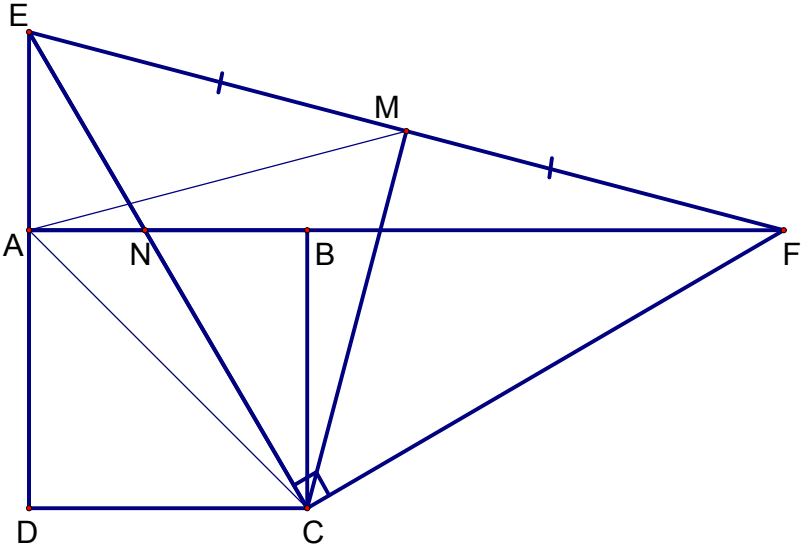


		$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ $\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$ $\Leftrightarrow P(P - 2) \leq 0$ $\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$ $\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$ Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy $P^2 \leq 2P$	0,25 0,25 0,25
2	a	$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$ $\Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(2y^2 - y - x) = -1$ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \in U(-1) = \{1; -1\}$ +) Nếu $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ +) Nếu $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ Khi đó $2y^2 - y = 1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5 0,25 0,5 0,25
	b	a) Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ $\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$ Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$	0,5 0,5 0,5



		$\Rightarrow a + b = -c$ $\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in Z$ <u>Lưu ý:</u> Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.	0,25 0,25
3	a	Đkxđ: $\forall x \in R$ $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0$ với $\forall x$ $\Rightarrow 10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ Ta có: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 7x = 28$ $\Leftrightarrow x = 4(t / m)$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
	b	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0.$ $\Leftrightarrow (x + y)^2 + 7(x + y) + 10 = -y^2$ $\Leftrightarrow (x + y + 2)(x + y + 5) = -y^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow -4 \leq x + y + 1 \leq -1$ * $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5; y = 0$ * $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2; y = 0$ Vậy $A_{\min} = -4$ khi $x = -5; y = 0$ $A_{\max} = -1$ khi $x = -2; y = 0$	0,5 0,5 0,5 0,5



4	a	 Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với $\widehat{ECB}$) Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow CE = CF$ $\Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp EF$	1,0
	b	* Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$ $\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $BC^2 = NB.BF \Rightarrow a^2 = NB.DE$ (đpcm) * $\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{EF}{2}$ $\triangle AEF$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{EF}{2}$ $\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC. Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC $\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).	0,5 0,5 0,5 0,5
	c	Đặt $DE = x$ ($x > 0$) $\Rightarrow BF = x$	0,5



	$S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot (AE + CB)$ $= \frac{1}{2} (AB + BF) \cdot (AE + AD)$ $= \frac{1}{2} (a + x) \cdot DE$ $= \frac{1}{2} (a + x)x$ $S_{ACFE} = 3 \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (a + x)x = 3a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - ax - x^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$ Do $x > 0$; $a > 0 \Rightarrow 3a + x > 0 \Rightarrow 2a - x = 0 \Leftrightarrow x = 2a$ $\Leftrightarrow A$ là trung điểm của $DE \Leftrightarrow AE = a$ Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1$ $\Rightarrow N$ là trung điểm của AB. Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3 \cdot S_{ABCD}$	0,25 0,5 0,5 0,25
5	* Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$. Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ $\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (1)$ * Ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $\frac{a + (b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$	0,5



Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

*HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí*

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.