



34 BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN NÂNG CAO LỚP 9

Bài toán 1: Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$

Bổ đề: Với $a \geq 0; b \geq 0$ $a+b = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \Rightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

Giải: Điều kiện: $2 \leq x \leq 10$, Ta có $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} \leq \sqrt{2(x-2+10-x)} = 4$ mà

$x^2 - 12x + 40 = (x^2 - 12x + 36) + 4 = (x-6)^2 + 4 \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-2=10-x \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x=6$$

Hoặc: Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = \frac{\sqrt{(x-2) \cdot 4}}{2} + \frac{\sqrt{(10-x) \cdot 4}}{2} \leq \frac{x-2+4}{4} + \frac{10-x+4}{4} = 4.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x-2=4 \\ 10-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Bài toán 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2$

Vì $x^2+x-1 \geq 0$ và $x-x^2+1 \geq 0$ nên Áp dụng bất đẳng thức Cô si mỗi số hạng của vế trái ta

$$\text{được: } \sqrt{(x^2+x-1) \cdot 1} \leq \frac{x^2+x-1+1}{2} = \frac{x^2+x}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x-x^2+1) \cdot 1} \leq \frac{x-x^2+1+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \leq \frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = x+1$ nên theo đề

ta có: $x^2 - x + 2 \leq x+1 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ thỏa. Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

Bài toán 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$ (1)



Điều kiện tồn tại phương trình: $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \quad (*)$

Vế phải của (1): $3x^2 - 12x + 14 = 3(x^2 - 4x + 4) + 2 = 3(x-2)^2 + 2 \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki thoả mãn (*) thì vế trái của phương trình (1):

$\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2x-3+5-2x)} = \sqrt{4} = 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2x-3=5-2x \Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Hoặc Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm ta có:

$\sqrt{(2x-3).1} + \sqrt{(5-2x).1} \leq \frac{2x-3+1}{2} + \frac{5-2x+1}{2} = 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-3=1 \\ 5-2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) là 2 nên $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 4: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$. (1)

Giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - x \geq 0 \\ 1 + 3x - 3x^2 \geq 0 \end{cases} \quad (2).$

Vế trái của phương trình (1): $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki với mọi x thoả mãn (2) thì vế phải của phương trình (1) thoả:

$\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2x^2 - x + 1 + 3x - 3x^2)} = \sqrt{2 + 4x - 2x^2} = \sqrt{4 - (x-1)^2} \leq 2$. đẳng thức xảy ra khi $2x^2 - x = 1 + 3x - 3x^2$. Để đẳng thức xảy ra ở phương trình (1) thì cả hai vế của phương trình (1) đều bằng 2. Nên $x = 1$. Thử lại thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 5: Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$ (1)

Giải:

Điều kiện $1+x^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$ Do $x^2-x+1 \geq 0$ với mọi x nên $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x^2-x+1}$ với $a \geq 0$; $b > 0$. Nên phương trình (1) trở thành :



$$5ab = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0. \text{ Giải phương trình này được } \frac{a}{b} = 2 \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Với $\frac{a}{b} = 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ thì $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm thỏa điều

$$\text{kiện } x_1 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; x_2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}.$$

Bài toán 6: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{42}{5-x}} + \sqrt{\frac{60}{7-x}} = 6$ (1)

Phương trình (1) có nghĩa khi $x < 5$ nên (1) $\Leftrightarrow \left(3 - \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right) + \left(3 - \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3 - \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)}{\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)} + \frac{\left(3 - \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)}{\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{9 - \frac{42}{5-x}}{\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)} + \frac{9 - \frac{60}{7-x}}{\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(5-x) - 42}{(5-x)\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)} + \frac{9(7-x) - 60}{(7-x)\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-3x) \left[\frac{1}{(5-x)\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)} + \frac{1}{(7-x)\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)} \right] = 0 \Leftrightarrow 3(1-3x) = 0 \text{ vì}$$

$$\frac{1}{(5-x)\left(3 + \sqrt{\frac{42}{5-x}}\right)} + \frac{1}{(7-x)\left(3 + \sqrt{\frac{60}{7-x}}\right)} > 0 \text{ nên } x = \frac{1}{3}. \text{ Thử lại đúng nên nghiệm của phương}$$

trình là $x = \frac{1}{3}$.

Bài toán 7: Giải phương trình: $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa là: $-3 < x < 0$; $0 < x < 5$. Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x(x-2) + x(x-5) + 2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)} = x(x+3)$



$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x-2)(x-5)} = 10x - x^2 \Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5) = (10x - x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(x-2)(x-5) = 100x^2 - 20x^3 + x^4 \Leftrightarrow 4x^2(x^2 - 7x + 10) = 100x^2 - 20x^3 + x^4 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 - 60x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x^2 - 8x - 60) = 0. \text{ Giải phương trình này được } x \in \left\{-\frac{10}{3}; 0; 6\right\}. \text{ Thử lại chỉ có hai nghiệm}$$

$x = 0$; $x = 6$ thỏa mãn đề cho.

Bài toán 8: Giải phương trình: $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$ (1)

Điều kiện $x > -2$ và $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$. Nhân hai vế của phương trình (1) với

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5}) \text{ ta được: } [(x+2) - (x+5)](1 + \sqrt{(x+2)(x+5)}) = 3(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5})$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \sqrt{(x+2)(x+5)}) = 3(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5}) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{(x+2)(x+5)} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+5}(1 - \sqrt{x+2}) - (1 - \sqrt{x+2}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+5} - 1)(1 - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} - 1 = 0 \\ 1 - \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 1 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases} \text{ Do } x > -2 \text{ nên } x = -4 \text{ (loại). Vậy nghiệm của phương}$$

trình $x = -1$.

***Cách giải khác:

Đặt $a = \sqrt{x+2} \Rightarrow a^2 = x+2$; $b = \sqrt{x+5} \Rightarrow b^2 = x+5$ nên $b^2 - a^2 = x+5 - x-2 = 3$. Do đó

phương trình (1) trở thành:
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 3 \\ (b-a)(1+ab) = 3 \end{cases} (*)$$

Từ hệ (*) suy ra $b^2 - a^2 = (b-a)(1+ab) \Leftrightarrow (b-a)(a+b-ab-1) = 0$

$$\begin{cases} b-a=0 \\ a+b-ab-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (a-1)(b-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \text{ khi đó ta cũng có } x = -1.$$

Bài toán 9: Giải phương trình: $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{10-x^2} = 3$ (1)

Giải: Điều kiện $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ 10-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 25 \\ x^2 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 10 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} (*)$.

Đặt $0 < a = \sqrt{25-x^2}$; $\sqrt{10-x^2} = b > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 25 - x^2 - 10 + x^2 = 15$. Nên phương trình (1) trở



$$\text{thành } \begin{cases} a-b=3 \\ a^2-b^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$$

Nếu $b = 1$ thì $10 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ so với điều kiện (*) $x = \pm 3$ thỏa

Nếu $a = 4$ thì $25 - x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ so với điều kiện (*) $x = \pm 3$ thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 3$.

Bài toán 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$ (*)

Lập phương hai vế của phương trình (*) ta được:

$$\begin{aligned} 5x &= x+1 + x-1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}[\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}] \Leftrightarrow 5x = 2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x} &= x \Leftrightarrow x^3 = 5x(x^2-1) \Leftrightarrow 4x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy phương trình có đúng ba nghiệm trên.

Bài toán 11: Giải phương trình $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$ (1)

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = a$; $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = b \Rightarrow a^3 = 1+\sqrt{x}$; $\Rightarrow b^3 = 1-\sqrt{x}$ nên phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2-ab+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (2-b)^2-b(2-b)+b^2-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ 4-4b+b^2-2b+b^2+b^2-1=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ b^2-2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ (b-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \end{aligned}$$

Nếu $a = 1$ thì $1 + \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nếu $b = 1$ thì $1 - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Bài toán 12: Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$ (1)

Giải: TXĐ $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Đặt $\sqrt[3]{2-x} = a$; $\sqrt{x-1} = b \geq 0$. Nên phương trình đã cho trở thành:



$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 1-3b^2+3b-b^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b(b^2-4b+3)=0 \end{cases}$$

Nên $b \in \{0;1;3\}$ Do đó $(a;b) = \{(1;0);(0;1);(-2;3)\}$

Nếu $a=0$ thì $\sqrt[3]{2-x}=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $b=1$ thì $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

Nếu $a=1$ thì $\sqrt[3]{2-x}=1 \Leftrightarrow 2-x=1 \Leftrightarrow x=1$; $b=0$ thì $\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Nếu $a=-2$ thì $\sqrt[3]{2-x}=-2 \Leftrightarrow 2-x=-8 \Leftrightarrow x=10$; $b=3$ thì $\sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x \in \{1;2;10\}$

Bài toán 13: Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$ (*)

Giải: Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \neq 0$ và $\frac{1-x}{x} \geq 0$ hay $0 < x \leq 1$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$. Thử thấy $x = \frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình (*)

Với $0 < x < \frac{1}{2}$ thì $1-x > x > 0$ và $2x-1 < 0$. Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}} > 1 > 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$

Với $\frac{1}{2} < x \leq 1$ thì $0 \leq 1-x < x$ và $2x-1 > 0$. Suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}} < 1 < 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 14: Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x^2-x+2001} - \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} - \sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$.

Giải: Đặt: $\sqrt[3]{3x^2-x+2001} = a \Rightarrow a^3 = 3x^2-x+2001$

$$-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002} = b \Rightarrow b^3 = -3x^2+7x-2002$$

$$-\sqrt[3]{6x-2003} = c \Rightarrow c^3 = -6x+2003$$

Suy ra $a^3+b^3+c^3=2002$. Do đó phương trình đã cho sẽ là $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ nên

$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 0$ Khai triển và thu gọn được: $3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

- Nếu $a+b=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-x+2001} = \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} \Leftrightarrow 3x^2-x+2001 = 3x^2-7x+2002$
 $\Leftrightarrow 6x=1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$



• Nếu $b+c=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} = -\sqrt[3]{6x-2003} \Leftrightarrow 3x^2-7x+2002 = -6x+2003$
 $\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0$. Phương trình này có nghiệm $x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right\}$

• Nếu $a+c=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2-x+2001} = \sqrt[3]{6x-2003} \Leftrightarrow 3x^2-x+2001 = 6x-2003$
 $\Leftrightarrow 3x^2-7x+4004=0$. Phương trình này vô nghiệm

Vậy phương trình có ba nghiệm $x \in \left\{ \frac{1}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right\}$.

Bài toán 15: Tính giá trị của biểu thức:

$\frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1-a^2}}$ trong đó a là nghiệm của phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$

Giải: Phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$ có $ac = -4\sqrt{2} < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt với a là nghiệm dương của phương trình nên ta có: $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$ (1). Vì $a > 0$ nên từ (1) có:

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}-a\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{2\sqrt{2}} = \frac{1-a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a^4 = \frac{1-2a+a^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Gọi } S &= \frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1-a^2}} = \frac{(a+1)\sqrt{a^4+a+1-a^2}}{(\sqrt{a^4+a+1})^2 - a^4} = \frac{(a+1)\sqrt{a^4+a+1-a^2}}{a^4+a+1-a^4} = \sqrt{a^4+a+1-a^2} \\ &= \sqrt{\frac{1-2a+a^2}{8} + a + 1} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1-2a+a^2+8a+8}{8}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a^2+6a+9}{8}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \frac{a+3}{2\sqrt{2}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài toán 16: Giải phương trình: $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x}=1000$

Giải: Đặt $\sqrt{1+8000x}+1=2y \Rightarrow \sqrt{1+8000x}=2y-1 \Rightarrow 1+8000x=4y^2-4y+1 \Rightarrow 4y^2-4y=8000x$
 $\Rightarrow y^2-y=2000x$. Do đó phương trình đã cho trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-x=2000y \\ y^2-y=2000x \end{cases} \quad (1). \text{Từ hệ phương trình (1) ta suy ra}$$

$$x^2-x-y^2+y=2000(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)+2000(x-y)=0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1+2000)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1999)=0$$

Từ hệ phương trình (1)

$$\text{suy ra: } x^2+y^2-(x+y)=2000(x+y) \Rightarrow 2001(x+y)=x^2+y^2 > 0 \Rightarrow x+y > 0.$$



Nên $x + y + 1999 > 0$. Do đó từ (2) suy ra $x - y = 0$ hay $x = y$. Thay vào hệ (1) ta được $x^2 - x = 2000x \Rightarrow x(x - 2001) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2001$. Nhưng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình có nghiệm là $x = 2001$.

Bài toán 17: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Điều kiện của phương trình: $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} &= \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 3}) - (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 3}) &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 3})(\sqrt{x - 1} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 3}) \text{ hoặc } \sqrt{x - 1} - 1 &= 0 \Leftrightarrow x - 2 = x - 3 \text{ hoặc } x - 1 = 1 \Leftrightarrow 0x = -1 \text{ hoặc } x = 2. \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

là một nghiệm của phương trình.

Bài toán 18: Giải phương trình $\frac{1}{5x^2} + \frac{1}{x^2 - 9x + 36} = \frac{1}{x^2 - 4x + 16}$

ĐKXĐ: $x \neq 0$

Từ phương trình trên ta có $\frac{1}{5x^2} + \frac{4}{4x^2 - 36x + 12^2} = \frac{9}{9x^2 - 36x + 12^2}$. Với $x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ở mẫu ta được: $\frac{1}{5} + \frac{4}{4 - \frac{36}{x} + \left(\frac{12}{x}\right)^2} = \frac{9}{9 - \frac{36}{x} + \left(\frac{12}{x}\right)^2}$. Đặt $\left(\frac{12}{x}\right)^2 - \frac{36}{x} = t$.

Khi đó ta có $\frac{1}{5} + \frac{4}{4 + t} = \frac{9}{9 + t}$. Quy đồng khử mẫu ta được: $t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow (t - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Do đó $\left(\frac{12}{x}\right)^2 - \frac{36}{x} = 6$ Quy đồng khử mẫu ta được $x^2 + 6x - 24 = 0$

Giải phương trình $x^2 + 6x - 24 = 0$ ta được nghiệm: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{33}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{33}$



Bài toán 19: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 20\frac{y}{x^2} + 11y = 2009 & (1) \\ 20\frac{z}{y^2} + 11z = 2009 & (2) \\ 20\frac{x}{z^2} + 11x = 2009 & (3) \end{cases}$$

Giải: Từ (1) suy ra $y\left(20\frac{1}{x^2} + 11\right) = 2009 \Rightarrow y > 0$. Tương tự từ (2) và (3) suy ra $x > 0$; $z > 0$. Vì

hệ số không đổi khi ta hoán vị vòng quanh đối với x ; y ; z có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$. Nghĩa là $x \geq y$; $x \geq z$. Trừ tường về của phương trình (3) cho phương trình (1) ta được

$$20\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 11(x - y) = 0 \Leftrightarrow 20(x^3 - yz^2) + 11x^2z^2(x - y) = 0 \quad (4). \text{ Vì } x \geq y > 0; x \geq z > 0 \text{ nên}$$

$$x - y \geq 0 \text{ và } x^3 - yz^2 \geq 0. \text{ Do đó phương trình (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 = yz^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{20}{x} + 11x = 2009 \Leftrightarrow 11x^2 - 2009x + 20 = 0. \text{ Do đó } x = y = z = \frac{2009 \pm \sqrt{4035201}}{22}.$$

Bài toán 20: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{697}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

a) Nếu có $(x; y)$ thoả (2). Chứng minh rằng $1 \leq y \leq \frac{7}{3}$

b) Giải hệ phương trình trên
Giải:

a) Từ phương trình (2) có: $x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + (y - 2)^2 = 0$. Phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y - 3)^2 - 4(y - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 3 + 2y - 4)(y - 3 - 2y + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (3y - 7)(1 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

b) Tương tự phương trình bậc hai ẩn y có nghiệm:

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x - 4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - 4x^2 + 12x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x(4 - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Do $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ và $1 \leq y \leq \frac{7}{3}$ nên $x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81}$.



Đẳng thức xảy ra $x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$. Khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$ thì thay vào phương trình (2) vô nghiệm. Nên hệ đã cho vô nghiệm.

Bài toán 21: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y \end{cases} (*)$$

Giải: Từ hệ phương trình suy ra $y > 0$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 144 & (1) \\ y^2 = 2x^2 - 24 & (2) \end{cases}$$

Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta có:

$$(x^2 + 2x^2 - 24)(x^2 - 2x^2 + 24) = 144 \Leftrightarrow (3x^2 - 24)(24 - x^2) = 144 \Leftrightarrow 72x^2 - 3x^4 - 576 + 24x^2 - 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 96x^2 + 720 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 16)^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 20; y^2 = 16 \text{ và } x^2 = 12; y = 0.$$

Thử lại được 4 nghiệm: $(x; y) = \{(2\sqrt{5}; 4); (-2\sqrt{5}; -4); (2\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 0)\}$.

Bài toán 22: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases} (*)$$

$$\text{Giải: Hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 + xy = 7(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + 3xy = 19(x - y)^2 \\ (x - y)^2 + xy = 7(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x - y)^2 - xy = 0 \\ (x - y)^2 - 7(x - y) + xy = 0 \end{cases} \cdot \text{Đặt } \begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó hệ trở thành: } \begin{cases} 6a^2 - b = 0 \\ a^2 - 7a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 7a^2 - 7a = 0 \Leftrightarrow 7a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = 1.$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a = 1 \Rightarrow b = 6 \text{ suy ra } \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 1 \\ x(-y) = -6 \end{cases} \cdot \text{Nên } x; (-y) \text{ là nghiệm của phương trình bậc}$$

$$\text{hai } k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 3; k_2 = -2$$



Nếu $x = k_1 = 3$ thì $y = -k_2 = 2$; Nếu $x = k_2 = -2$ thì $y = -k_1 = -3$; Vậy hệ đã cho có nghiệm là:
 $(x; y) = \{(0; 0); (3; 2); (-3; -2)\}$.

Bài toán 23: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$
 . Tính $Q = x^2 + y^2$.

Giải: Từ (1) suy ra $x^3 = -3 + 4y - 2y^2 = -1 - 2(1 - 2y + y^2) = -1 - 2(y - 1)^2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$ (3)

Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ có $x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ (4)

Từ (3) và (4) $x = -1$. Do đó $y = 1$. Vậy $Q = x^2 + y^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$.

Bài toán 24: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: Từ phương trình (2) suy ra $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 11 = 0$.

Từ phương trình (1) suy ra $x = 3(y + 1)$. Nên

$$(3y + 3 - 1)^2 + (y - 1)^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow (3y + 2)^2 + (y - 1)^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow 9y^2 + 12y + 4 + y^2 - 2y + 1 - 11 = 0$$

$\Leftrightarrow 10y^2 + 10y - 6 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 5y - 3 = 0$. Giải phương trình bậc hai ẩn y được hai nghiệm :

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{85}}{10}$$

Nếu $y = \frac{-5 + \sqrt{85}}{10}$ thì $x = 3(y + 1) = \frac{15 + 3\sqrt{85}}{10}$; Nếu $y = \frac{-5 - \sqrt{85}}{10}$ thì $x = 3(y + 1) = \frac{15 - 3\sqrt{85}}{10}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \left\{ \left(\frac{15 + 3\sqrt{85}}{10}; \frac{-5 + \sqrt{85}}{10} \right); \left(\frac{15 - 3\sqrt{85}}{10}; \frac{-5 - \sqrt{85}}{10} \right) \right\}$.

Bài toán 25: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ phương trình (*) tương đương



$$\begin{cases} 8x^3 + 12x^2y = 20 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + 3.4x^2y + 3.2xy^2 + y^3 = 27 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^3 = 27 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 3 \\ y^3 - 9y^2 + 7 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình : $y^3 - 9y^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y^2 - 7y - 7) = 0$ có ba nghiệm $y_1 = 1$;

$$y_2 = \frac{7 + \sqrt{105}}{4} ; y_3 = \frac{7 - \sqrt{105}}{4}$$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x = 1$; Nếu $y = \frac{7 + \sqrt{105}}{4} \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{105}}{8}$; Nếu $y = \frac{7 - \sqrt{105}}{4} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{105}}{8}$; Vậy

hệ phương trình có ba nghiệm $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{5 - \sqrt{105}}{8}; \frac{7 + \sqrt{105}}{4} \right); \left(\frac{5 + \sqrt{105}}{8}; \frac{7 - \sqrt{105}}{4} \right) \right\}$

Bài toán 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$.

Giải: Từ phương trình (1) suy ra $y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$. Giải phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm $y_1 = 2x - 1$; $y_2 = -x + 2$. Nên hệ phương trình trên tương đương:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5} \right) \right\}$.

Bài toán 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ 2y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 3\sqrt{4x-3} \end{cases}$ (Đề thi chuyên Lê Khiết năm học

2008- 2009)

Điều kiện của hệ: $x \geq \frac{3}{4}$; $y \geq \frac{3}{4}$



Khi đó ta có:
$$\begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ 2y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 3\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 3(\sqrt{4y-3} - \sqrt{4x-3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ \frac{(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} = \frac{3(\sqrt{4y-3} - \sqrt{4x-3})(\sqrt{4y-3} + \sqrt{4x-3})}{(\sqrt{4x-3} + \sqrt{4y-3})} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ \frac{x^2y - y^2x}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} = \frac{3(4y-3-4x+3)}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{4y-3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ \frac{xy(x-y)}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{12(x-y)}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{4y-3}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ (x-y) \left[\frac{xy}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{12}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{4y-3}} \right] = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do điều kiện $x \geq \frac{3}{4}; y \geq \frac{3}{4}$

nên phương trình(*) $x-y=0$ Do $\left[\frac{xy}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{12}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{4y-3}} \right] > 0$ hay $x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình ta có: $3x\sqrt{x} = 3\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow x^3 = 4x-3 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (loại). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=y=1 \\ x=y=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Cách giải khác: Điều kiện của hệ $x \geq \frac{3}{4}; y \geq \frac{3}{4}$

Ta có:
$$\begin{cases} 2x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 3\sqrt{4y-3} \\ 2y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 3\sqrt{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{4y-3} \\ \sqrt{xy}(2\sqrt{y} + \sqrt{x}) = 3\sqrt{4x-3} \end{cases}$$

- Giả sử $x > y$ suy ra $3\sqrt{4x-3} > 3\sqrt{4y-3}$ nên $\sqrt{xy}(2\sqrt{y} + \sqrt{x}) > \sqrt{xy}(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow (2\sqrt{y} + \sqrt{x}) > (2\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow \sqrt{y} > \sqrt{x} \Rightarrow y > x$ (vô lý)
- Giả sử $x < y$ suy ra $3\sqrt{4y-3} > 3\sqrt{4x-3}$ nên $\sqrt{xy}(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) > \sqrt{xy}(2\sqrt{y} + \sqrt{x}) \Rightarrow (2\sqrt{x} + \sqrt{y}) > (2\sqrt{y} + \sqrt{x}) \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > y$ (vô lý)



Nên suy ra $x = y$. Thay $x = y$ vào hệ ta có phương trình:

$$3x\sqrt{x} = 3\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow x^3 = 4x-3 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (loại). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=y=1 \\ x=y=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

Bài toán 28: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} & (1) \\ y+z=\sqrt{4x-1} & (2) \\ z+x=\sqrt{4y-1} & (3) \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x; y; z \geq \frac{1}{4}$. Nhân mỗi phương trình với 2 ta có:

$$\begin{cases} 2x+2y=2\sqrt{4z-1} \\ 2y+2z=2\sqrt{4x-1} \Rightarrow 4x+4y+4z-2\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4y-1}-2\sqrt{4z-1}=0 \\ 2z+2x=2\sqrt{4y-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (4x-1-2\sqrt{4x-1}+1) + (4y-1-2\sqrt{4y-1}+1) + (4z-1-2\sqrt{4z-1}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x-1}-1)^2 + (\sqrt{4y-1}-1)^2 + (\sqrt{4z-1}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}.$$

Bài toán 29 Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 & (1) \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 & (2) \\ 12z^2 - 48z + 64 = x^3 & (3) \end{cases}$$

Giải:

Giả sử bộ ba số $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình trên thì $(y; z; x)$ và $(z; x; y)$ cũng là nghiệm của phương trình này. Giả sử x là số lớn nhất $x \geq y; x \geq z$ (4)

Từ (1) ta có $12x^2 - 48x + 64 = y^3 \Leftrightarrow y^3 = 12(x^2 - 4x + 4) + 16 = 12(x-2)^2 + 16 \geq 16 \Rightarrow y > 2$. Tương tự



từ phương trình (2) và (3) ta cũng có $x > 2$; $z > 2$. (5)

Trừ từng vế của (1) và (3) ta được: $x^3 - y^3 = 12(z^2 - x^2) - 48(z - x) = 12(z - x)(x + z - 4)$. (6)

Theo (4) và (5) suy ra $x^3 - y^3 \geq 0$; $z - x \leq 0$; $x + z - 4 > 0$. Nên từ (6) suy ra $x = y = z$ (7)

Thay (7) vào (1) ta được: $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^3 = 0 \Rightarrow x = 4$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (4; 4; 4)$

Bài toán 30: Tìm x, y, z biết $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Điều kiện: $x; y; z \geq 0$; $x - y + z \geq 0$. Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$. Do $a, b, c \geq 0$ nên ta có

$$\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} = a - b + c \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 = (a - b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$\Leftrightarrow -2b^2 + 2ab - 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow 2b(a - b) - 2c(a - b) = 0 \Leftrightarrow 2(a - b)(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \text{ Do đó } x = y \text{ và } z \text{ tùy ý ; } y = z \text{ và } x \text{ tùy ý}$$

Hoặc cách giải khác: $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \Rightarrow \sqrt{x - y + z} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{z}$

$$\Rightarrow x - y + z + y + 2\sqrt{y(x - y + z)} = x + z + 2\sqrt{xz}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y(x - y + z)} = \sqrt{xz} \Rightarrow y(x - y + z) = xz \Rightarrow y(x - y) + yz - xz = 0$$

$$\Rightarrow y(x - y) - z(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(y - z) = 0 \text{ Do đó } x = y \text{ và } z \text{ tùy ý hoặc } y = z \text{ và } x \text{ tùy ý.}$$

Bài toán 31: Cho $x > 0$, $y > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x + y} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1}$.

Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. (1) Suy ra $x > 1$; $y > 1$ và các căn thức $\sqrt{x - 1}$; $\sqrt{y - 1}$ tồn tại. Từ (1) suy ra

$$x + y = xy \Rightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) = 1 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)(y - 1)} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{(x - 1)(y - 1)} = 2$$

$$\Rightarrow x + y = x + y + 2\sqrt{(x - 1)(y - 1)} - 2 = (\sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1})^2 \Rightarrow \sqrt{x + y} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 32: Cho tam giác có số đo các đường cao là các số nguyên, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1. Chứng minh tam giác đó là tam giác đều.



Giải:

Gọi x, y, z lần lượt là độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác, đường cao của tam giác luôn lớn hơn đường kính đường tròn nội tiếp tam giác đó, nghĩa là $x > 2; y > 2; z > 2$. Vì x, y, z là các số nguyên dương nên

$$x \geq 3; y \geq 3; z \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \text{ Mặt khác ta lại có:}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{ax} + \frac{b}{by} + \frac{c}{cz} = \frac{a+b+c}{2S_{ABC}} = \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow x = y = z = 3 \text{ nên tam giác ABC đều.}$$

Bài toán 33: Cho phương trình $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$ (*). Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$.

Giải:

Đặt $x^2 = t > 0$ khi đó phương trình (*) trở thành $t^2 + 2mt + 4 = 0$ (1). Phương trình (*) có nghiệm phân biệt nên phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1; t_2$ nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = -2m > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2 \\ m < 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \wedge m < -2 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m < -2$$

Khi $m < -2$ thì phương trình (*) có 4 nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$ và

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = 8m^2 - 16. \text{ Từ giả thiết suy ra } 8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m = -\sqrt{6} \text{ vì } m < -2$$

Bài toán 34: Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = 0$ ($a \neq 0$) (*) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 1$ thì $5a^2 = 2b^2 + ac$.

Giải:

Nếu phương trình (*) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì đa thức bậc bốn ở vế trái của phương trình phân tích được:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = (x - x_1)(x - x_2)(ax^2 + mx + n) =$$

$$= (x^2 - px + 1)(ax^2 + mx + n) \quad (\text{vì } x_1 \cdot x_2 = 1 \text{ và } p = x_1 + x_2)$$

$$= ax^4 + (m - ap)x^3 + (a - mp + n)x^2 + (m - pn)x + n. \text{ Đồng nhất thức hai vế của phương trình trên}$$



ta được :

$$\begin{cases} n = 4a & (1) \\ m - pn = -2b & (2) \\ m - ap = b & (3) \\ a - mp + n = c & (4) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $5a^2 = 2b^2 + ac$.

Cách giải 2: Vì $x_1 \neq 0$ và $x_2 = \frac{1}{x_1}$ đều là nghiệm của phương trình (*) nên ta có:

$$ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 - 2bx_1 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(x_1^4 - 1) - bx_1(x_1^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2 - 1)(ax_1^2 - bx_1 + a) = 0$$

$$= (x_1 - 1)(x_1 + 1)(ax_1^2 - bx_1 + a).$$

****Có ba trường hợp xảy ra**

Trường hợp 1: Nếu $x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$. Đa thức vế trái chia hết cho

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ nên đa thức dư đồng nhất phải bằng 0. Bằng phép chia đa thức cho đa thức ta được:

$$\begin{cases} -4a + b - 2c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \end{cases} \Rightarrow 5a^2 = 2b^2 + ac$$

Trường hợp 2: Nếu $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 = 1$. Tương tự trường hợp (1) ta cũng có $5a^2 = 2b^2 + ac$

Trường hợp 3: Nếu $|x_1| \neq 1$ thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 - bx + a = 0$. Chia đa thức (*) cho $ax^2 - bx + a$ ta được đa thức dư đồng nhất bằng 0 có $(a - bx)(5a^2 - 2b^2 - ac) = 0 \Rightarrow 5a^2 = 2b^2 + ac$.

Cách giải 3: Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (*) nên chia hai vế cho x^2 ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{2}{x}\right) + c = 0 \quad (1). \text{ Đặt } y = x - \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4 \text{ nên phương trình trở thành}$$

$$ay^2 + by + 4a + c = 0 \quad (2). \text{ Đặt } y_1 = x_1 - \frac{2}{x_1}; y_2 = x_2 - \frac{2}{x_2} \quad (3). \text{ Áp dụng định lý Viet cho phương}$$

$$\text{trình (2) } y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}; y_1 \cdot y_2 = \frac{4a + c}{a}. \text{ Thay vào (3) và biến đổi ta được } 5a^2 = 2b^2 + ac.$$

Phương trình (2) có hai nghiệm y_1, y_2 . Nếu $y_1 = y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ mới chỉ là một nghiệm của phương trình (2) vậy ta phải xét thêm các trường hợp 1) 2) như cách giải 2:

BÀI TẬP BỔ SUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH



1) Giải các phương trình sau:

a) $(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$ KQ: $x=1; x=36$

b) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ $x \in \left\{8; \frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$

2) Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=4 \\ x+y=7 \end{cases}$ KQ: $(x;y)=(3;4)$

b) $\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17 \end{cases}$ KQ: $(x;y)=\{(1;3);(3;1)\}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases}$ KQ: $(x;y)=\{(1;0);(-1;0)\}$

d) $\begin{cases} x^3-xy^2+2000y=0 \\ y^3-x^2y-500x=0 \end{cases}$

3) Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{10-2x}-\sqrt{2x+3}=1$

2) $\sqrt{48-x^3}+\sqrt{35-x^3}=13$

3) $\sqrt[5]{32-x^2}-\sqrt[5]{1-x^2}=4$

4) $\sqrt[3]{x-1}+3=\sqrt[4]{82-x}$

5) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{20-x}=4$

6) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

7) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

8) $\sqrt{8+\sqrt{x}}+\sqrt{5-\sqrt{x}}=5$



Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

*HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí*

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.