



CHUYÊN ĐỀ TOÁN 6 (BD HSG)

DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

I. Phương pháp dự đoán và quy nạp:

Trong một số trường hợp khi gặp bài toán tính tổng hữu hạn

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1)$$

Bằng cách nào đó ta biết được kết quả (dự đoán, hoặc bài toán chứng minh khi đã cho biết kết quả). Thì ta nên sử dụng phương pháp này và hầu như thế nào cũng chứng minh được.

Ví dụ 1: Tính tổng $S_n = 1+3+5+\dots+(2n-1)$

Thử trực tiếp ta thấy : $S_1 = 1$

$$S_2 = 1 + 3 = 2^2$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

... ..

Ta dự đoán $S_n = n^2$

Với $n = 1; 2; 3$ ta thấy kết quả đúng

Giả sử với $n = k$ ($k \geq 1$) ta có $S_k = k^2$ (2)

Ta cần phải chứng minh $S_{k+1} = (k+1)^2$ (3)

Thật vậy cộng 2 vế của (2) với $2k+1$ ta có

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2 + (2k+1)$$

Vì $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$ nên ta có (3) tức là $S_{k+1} = (k+1)^2$



Theo nguyên lý quy nạp bài toán được chứng minh

$$\text{Vậy } S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Tương tự ta có thể chứng minh các kết quả sau đây bằng phương pháp quy nạp toán học.

$$1, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4, 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12} \cdot n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

II. Phương pháp khử liên tiếp:

Giả sử ta cần tính tổng (1) mà ta có thể biểu diễn a_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, qua hiệu hai số hạng liên tiếp của 1 dãy số khác, chính xác hơn, giả sử: $a_1 = b_1 - b_2$

$$a_2 = b_2 - b_3$$

.....

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Khi đó ta có ngay:

$$\begin{aligned} S_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tổng:

$$S = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$$



Ta có : $\frac{1}{10.11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}, \frac{1}{11.12} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

Do đó :

$$S = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

- Dạng tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n > 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ta có $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Ví dụ 4: Tính tổng

$$S_n = 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! \quad (n! = 1.2.3 \dots n)$$

Ta có : $1! = 2! - 1!$

$$2.2! = 3! - 2!$$

$$3.3! = 4! - 3!$$

.....



$$n.n! = (n+1) - n!$$

$$\text{Vậy } S_n = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n!$$

$$= (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

Ví dụ 5 : tính tổng

$$S_n = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

$$\text{Ta có : } \frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}; \quad i = 1; 2; 3; \dots; n$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } S_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

III. Phương pháp giải phương trình với ẩn là tổng cần tính:

Ví dụ 6 : Tính tổng

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100} \quad (4)$$

Ta viết lại S như sau :

$$S = 1 + 2 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99})$$

$$S = 1 + 2 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99} + 2^{100} - 2^{100})$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 (S - 2^{100}) \quad (5)$$

$$\text{Từ (5) suy ra } S = 1 + 2S - 2^{101}$$

$$\Rightarrow S = 2^{101} - 1$$

Ví dụ 7: tính tổng



$$S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n \quad (p \neq 1)$$

Ta viết lại S_n dưới dạng sau :

$$S_n = 1 + p (1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1})$$

$$S_n = 1 + p (1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} + p^n - p^n)$$

$$\Leftrightarrow S_n = 1 + p (S_n - p^n)$$

$$\Leftrightarrow S_n = 1 + p.S_n - p^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n (p - 1) = p^{n+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

Ví dụ 8 : Tính tổng

$$S_n = 1 + 2p + 3p^2 + \dots + (n+1)p^n, \quad (p \neq 1)$$

$$\text{Ta có : } p.S_n = p + 2p^2 + 3p^3 + \dots + (n+1)p^{n+1}$$

$$= 2p - p + 3p^2 - p^2 + 4p^3 - p^3 + \dots + (n+1)p^n - p^n + (n+1)p^n - p^n + (n+1)p^{n+1}$$

$$= (2p + 3p^2 + 4p^3 + \dots + (n+1)p^n) - (p + p + p + \dots + p^n) + (n+1)p^{n+1}$$

$$= (1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \dots + (n+1)p^n) - (1 + p + p^2 + \dots + p^n) + (n+1)p^{n+1}$$

$$p.S_n = S_n - \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} + (n+1)p^{n+1} \quad (\text{theo VD 7})$$

$$\text{Lại có } (p-1)S_n = (n+1)p^{n+1} - \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{(n+1)p^{n+1}}{p - 1} - \frac{p^{n+1} - 1}{(p - 1)^2}$$

IV. Phương pháp tính qua các tổng đã biết

- Các kí hiệu : $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
- Các tính chất :



$$1, \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$2, \sum_{i=1}^n a \cdot a_i = a \sum_{i=1}^n a_i$$

Ví dụ 9 : Tính tổng :

$$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

$$\text{Ta có : } S_n = \sum_{i=1}^n i(i+1) = \sum_{i=1}^n (i^2 + i) = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i$$

Vì :

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Theo I})$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{cho nên : } S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Ví dụ 10 : Tính tổng :

$$S_n = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1)$$

$$\text{ta có : } S_n = \sum_{i=1}^n i(3i-1) = \sum_{i=1}^n (3i^2 - i)$$

$$= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i$$

Theo (I) ta có :

$$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

Ví dụ 11 . Tính tổng

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 5^3 + \dots + (2n+1)^3$$



ta có :

$$\begin{aligned}
 S_n &= [(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (2n+1)^3] - [2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3] \\
 &= [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (2n+1)^3] - 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3) \\
 S_n &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - \frac{8n^2(n+1)^2}{4} \quad (\text{theo (I) - 3}) \\
 &= (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\
 &= (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)
 \end{aligned}$$

V/ Vận dụng trực tiếp công thức tính tổng các số hạng của dãy số cách đều (Học sinh lớp 6)

- Cơ sở lý thuyết:

+ Để đếm số hạng của 1 dãy số mà 2 số hạng liên tiếp của dãy cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

$$\text{Số số hạng} = (\text{số cuối} - \text{số đầu}) : (\text{khoảng cách}) + 1$$

+ Để tính tổng các số hạng của một dãy số mà 2 số hạng liên tiếp cách nhau cùng 1 số đơn vị , ta dùng công thức:

$$\text{Tổng} = (\text{số đầu} + \text{số cuối}) . (\text{số số hạng}) : 2$$

Ví dụ 12 :

$$\text{Tính tổng } A = 19 + 20 + 21 + \dots + 132$$

$$\text{Số số hạng của } A \text{ là : } (132 - 19) : 1 + 1 = 114 \text{ (số hạng)}$$

$$A = 114 (19 + 132) : 2 = 8607$$

Ví dụ 13 : Tính tổng

$$B = 1 + 5 + 9 + \dots + 2005 + 2009$$



số số hạng của B là $(2009 - 1) : 4 + 1 = 503$

$$B = (2009 + 1) \cdot 503 : 2 = 505515$$

VI / Vận dụng 1 số công thức chứng minh được vào làm toán

Ví dụ 14 : Chứng minh rằng : $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$

Từ đó tính tổng $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$

Chứng minh : cách 1 : VT = $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$

$$= k(k+1)[(k+2) - (k-1)] = k(k+1) \cdot 3 = 3k(k+1)$$

Cách 2 : Ta có $k(k+1) = k(k+1) \cdot \frac{(k+2) - (k-1)}{3}$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{k(k+1)(k-1)}{3} \quad *$$

$$\Rightarrow 3k(k+1) = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} - \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

.....

$$n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$S = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 0}{3} + \frac{(n+2)n(n+1)}{3} = \frac{(n+1)n(n+2)}{3}$$

Ví dụ 15: Chứng minh rằng:

$$k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) = 4k(k+1)(k+2)$$

từ đó tính tổng $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

Chứng minh : VT = $k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)]$



$$= k(k+1)(k+2) \cdot 4$$

$$\text{Rút ra: } k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$$

$$\text{Áp dụng: } 1.2.3 = \frac{1.2.3.4}{4} - \frac{0.1.2.3}{4}$$

$$2.3.4 = \frac{2.3.4.5}{4} - \frac{1.2.3.4}{4}$$

.....

$$n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

*** Bài tập đề nghị:**

Tính các tổng sau

$$1, B = 2 + 6 + 10 + 14 + \dots + 202$$

$$2, a, A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{6.2} + 2^{6.3}$$

$$b, S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{99} + 5^{100}$$

$$c, C = 7 + 10 + 13 + \dots + 76$$

$$3, D = 49 + 64 + 81 + \dots + 169$$

$$4, S = 1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 + \dots + n(n+3), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$5, S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$6, S = \frac{4}{5.7} + \frac{4}{7.9} + \dots + \frac{4}{59.61}$$



$$7, A = \frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66}$$

$$8, M = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2005}}$$

$$9, S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$10, S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

$$11, S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$12, M = 9 + 99 + 999 + \dots + \underline{99\dots\dots 9}$$

50 chữ số 9

$$13, \text{Cho: } S_1 = 1+2$$

$$S_3 = 6+7+8+9$$

$$S_2 = 3+4+5$$

$$S_4 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14$$

Tính $S_{100} = ?$

Trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi đã kết hợp các dạng toán có liên quan đến dạng tính tổng để rèn luyện cho các em, chẳng hạn dạng toán tìm x :

$$14, a, (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+100) = 5070$$

$$b, 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 820$$

$$c, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1 \frac{2013}{2015}$$

Hay các bài toán chứng minh sự chia hết liên quan

$$15, \text{Chứng minh : a, } A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} \text{ là lũy thừa của 2}$$

$$b, B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} : 3 ; 7 ; 15$$



$$c, C = 3 + 3^3 + 3^5 + \dots + 3^{2015} : 13 ; 41$$

$$d, D = 11^9 + 11^8 + 11^7 + \dots + 11 + 1 : 5$$

www.hoc247.net



Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bị – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường **PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An** và các trường Chuyên khác cùng **TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn**.

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học và Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: **TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn** cùng đội HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

*HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí*

- **HOC247 NET:** Website học miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm miễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.